JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
2. Harjoitusten malliratkaisut

1. Luennoilla laskettiin jo

$$\begin{aligned} T_{2n+1,0}f(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Lauseen 2.5. nojalla

$$\sin x = f(x) = T_{2n+1,0}f(x) + R_{2n+1,0}f(x)$$

missä virhetermi in muotoa

$$R_{2n+1,0}f(x) = \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x f^{(2n+2)}(t)(x-t)^{2n+1}\,dt\,.$$

Tätä voidaan arvioida huomaamalla että $|f^{(2n+2)}(t)| \leq 1$ (muista että sinin derivaatta on kosini, jne ...), joten kun $x \in [0, \pi]$, niin

$$\begin{aligned} \left|R_{2n+1,0}f(x)\right| &= \left|\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x f^{(2n+2)}(t)(x-t)^{2n+1}\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x |f^{(2n+2)}(t)||x-t|^{2n+1}\,dt \\ &\leq \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x (x-t)^{2n+1}\,dt \\ &= \frac{1}{(2n+2)!}\,x^{2n+2}. \end{aligned}$$

Voidaan siis arvioida 9. asteen polynomilla (valitaan siis n=4)

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0,84147100\cdots$$

ja virheen suuruutta voidaan arvioida

$$\left|R_{9,0}f(1)\right| \leq \frac{1}{10!} \approx 3 \cdot 10^{-7}.$$

Saadaan siis

$$\sin 1 = 0,8414710 \pm 0,0000003.$$

2.

(a) Sarja hajaantuu.

Koska $\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{1+k^2} = 1$, niin termit $(-1)^k \frac{k^2}{1+k^2}$ eivät suppene nollaan, jolloin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{1+k^2}$$

hajaantuu (Lause 4.3).

(b) Sarja suppenee.

Ratkaistaan tämä juuritestillä. Koska

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^{10}}{10^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^{\frac{10}{k}}}{10} = \lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt[k]{k})^{10}}{10} = \frac{1}{10}$$

niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{10}}{10^k}$$

suppenee juuritestin nojalla (Lause 4.13).

3.

(a) Sarja suppenee.

Tämäkin ratkeaa helpoiten juuritestillä. Koska

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2}$$

niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k$$

suppenee juuritestin nojalla.

(b) Sarja suppenee.

Ratkaistaan tämä suhdetestillä. Koska

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{[(k+1)!]^2}{[2(k+1)]!}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2(k!)^2}{(2k+2)(2k+1)[(2k)!]}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})^2}{(2+\frac{2}{k})(2+\frac{1}{k})} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$$

suppenee suhdetestin nojalla (Lause 4.13).

4.

(a) Sarja suppenee.

Valitaan joku $1 < p < 2$ ja verrataan sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$ yliharmoniseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ (joka siis suppenee). Muistetaan myös (Analyysi 1:ltä, löytyy myös MAOL taulukkokirjasta) että kaikilla $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0.$$

Tällöin koska

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\log k}{k^2}}{\frac{1}{k^p}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{k^{2-p}} = 0,$$

niin sarja suppenee Lauseen 4.10 nojalla (valitsemalla $a_k = \frac{\log k}{k^2}$ ja $b_k = \frac{1}{k^p}$).

(b) Sarja hajaantuu.

Verrataan sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ harmoniseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Koska

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

niin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu myös $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ hajaantuu Lauseen 4.10 nojalla (valitsemalla $a_k = \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ ja $b_k = \frac{1}{k}$).

5. Sarja hajaantuu kun $p \in (0, 1]$ ja suppenee kun $p > 1$.

Määritellään funktio $f : [2, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}$, joka on jatkuva ja vähenevä ja sen integraali,

kun $p \neq 1$ on

$$\int_2^a \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx = \frac{1}{1-p}\left((\log a)^{1-p} - (\log 2)^{1-p}\right)$$

sillä $D\frac{1}{1-p}(\log x)^{1-p} = \frac{1}{x(\log x)^p}$

ja kun $p = 1$

$$\int_2^a \frac{1}{x(\log x)}\, dx = (\log(\log a) - \log(\log 2))$$

sillä $D \log(\log x) = \frac{1}{x(\log x)}$.

Tästä nähdään etta kun $p \in (0, 1]$ niin $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx = \infty$ joten tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$$

hajaantuu integraalirestin (Lause 4.15) nojalla. Kun $p > 1$ niin $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx = \frac{(\log 2)^{1-p}}{p-1}$ joten tällöin sarja suppenee.

6. Vaikkapa $a_k = \frac{1}{k}$ ja $b_k = \frac{1}{k^2}$ kelpaavat. Harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu ja yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee mutta molemmilla

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} = 1.$$

7. Nähdään heti että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ hajaantuu kun $r \geq 1$, sillä tällöin termit eivät suppene nollaan. Toisaalta kun $r \in (0,1)$ niin sarja suppenee juuritestin nojalla sillä

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{kr^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}r = r < 1.$$

8.

(a) Oletetaan että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin koska $0 \leq a_j^{\pm} \leq |a_j|$ niin

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{\pm} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|.$$

Sarjat $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ ovat siis ylhäältä rajoitetut joten ne suppenevat Lauseen 4.8 nojalla.

Oletetaan sitten etta $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ suppenevat. Tällöin myös niiden termien summien muodostama sarja

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j^+ + a_j^-)$$

suppenee. Mutta koska $|a_j| = a_j^+ + a_j^-$, niin $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ suppenee.

(b) Oletetaan että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee mutta $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ hajaantuu.

ANTITEESI: Ainakin toinen sarjoista $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\pm}$ suppenee.

Jos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ suppenee, niin koska $a_j^- = a_j^+ - a_j$, niin myös $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ suppenee. Tällöin (a)-kohdan nojalla myös $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ suppenee, mikä on ristiriita.

Jos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ suppenee, niin koska $a_j^+ = a_j + a_j^-$, niin myös $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ suppenee. Tällöin (a)-kohdan nojalla $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ suppenee, mikä on taas ristiriita.