

**Analyysi 3, kesä 2012.**
Harjoitus 2 6.6.2012

Huom! Luennoilla hypättiin luentomonisteen lukuun 4: lukusarjat. Luku 3 käydään vasta tämän jälkeen.

1. Arvioidaan funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ välillä $x \in [0, \pi]$ Taylorin polynomilla $T_{n,0}f(x)$. Arvioi virhetermin suuruutta. Kuinka hyvin $T_{9,0}f(1)$ approksimoi lukua $\sin 1$?

2. Suppenevatko sarjat?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{1+k^2} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}.$$

3. Suppenevatko sarjat?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k-1} \right)^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

4. Suppenevatko sarjat?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{k} \right).$$

5. Tutki integraalitestin avulla millä arvoilla $p > 0$ sarja

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$$

suppenee/hajaantuu.

6. Anna esimerkki suppenevasta sarjasta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja hajaantuvasta sarjasta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, joille pätee $a_k \geq 0$ ja $b_k \geq 0$ kaikilla k , ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} = 1.$$

7. Tutki millä luvuilla $r > 0$, sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k$$

suppenee.

8. Olkoon $a_j \in \mathbb{R}$ ja $a_j^+ := \max\{a_j, 0\}$ (positiivitermit), $a_j^- := \max\{-a_j, 0\}$ (negatiivitermit). Osoita, että

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti jos ja vain jos sekä $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ suppenevat.

(b) jos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, muttei itseisesti, niin sekä $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ hajaantuvat.

(Vihje: $|a_j| = a_j^+ + a_j^-$ ja $0 \leq a_j^+ \leq |a_j|$, $0 \leq a_j^- \leq |a_j|$.)

9. Ylimääräinen Tehtävä. Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$$

summa.