Analyysi 3, kesä 2012.
3. Harjoitusten malliratkaisut

1. Molemmat sarjat suppenevat Leibnitzin ehdon nojalla. Tarksitetaan etta lauseen oletukset ovat voimassa.

(a) Sarja on muotoa $\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^{(k+1)}a_k$, missä $a_k = \frac{\log k}{k}$. Generoivat termit a_k ovat $a_k \geq 0$ ja $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{k} = 0$. Lisäksi funktio $f : [3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\log x}{x}$ on vähenevä sillä

$$f'(x) = \frac{-\log x + 1}{x^2} \leq 0 \qquad \text{kun } x > 3.$$

Tällöin jono $(a_k)_{k=3}^{\infty}$ on vähenevä.

(b) Sarja on muotoa $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}a_k$, missä $a_k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Generoivat termit a_k ovat $a_k \geq 0$ (silla $\log x > 0$ kun $x > 1$) ja $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log(1) = 0$. Lisäksi koska luvut $1 + \frac{1}{k}$ muodostavat vähenevän sarjan ja koska logaritmi on kasvava funktio niin jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on vähenevä.

2. Molemmat sarjat suppenevat.

(a) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}a_k$, missä $a_k = \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ suppenee Leibnitzin ehdon nojalla. Huomataan etta sini on kasvava ja positiivinen välillä $[0, 1]$. Generoivat termit a_k muodostavat siis vähenevän jonon ja $a_k \geq 0$. Lisäksi $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = 0$.

(b) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, missä $a_k = \frac{\cos(\pi k)}{k^{\frac{3}{2}}}$ suppenee itseisesti. Tämä seuraa suoraan majoranttiperiaattesta, sillä kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ ja yliharmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

suppenee. (Huomaa että $\cos(\pi k) \in \{-1, 1\}$ ja sarja on vuorotteleva.)

3. Huomataan aivan ensiksi että termit voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_k = \sqrt{k^2 + 1} - k = \frac{k^2 + 1 - k^2}{\sqrt{k^2 + 1} + k} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1} + k}.$$

(a) Sarja hajaantuu. Tämä nähdään vertaamalla sitä harmoniseen sarjaan ja

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1} + k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} + 1} = \frac{1}{2},$$

joten sarja hajaantuu lauseen 4.10 nojalla.

(b) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}a_k$ suppenee Leibnitzin ehdon nojalla. Huomataan että generoivat termit

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1} + k}$$

ovat positiivisia ja suppenevat kohti nollaa kun $k \to \infty$. Lisäksi $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + x$ on kasvava funktio kun $x > 0$. Tällöin a_k muodostavat vähenevän jonon.

4. Tehtävänannossa oli taas virhe (sori). Sarja on muodollisesti siis

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}a_j = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

missä termit saadaan kaavoilla $a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$ ja $a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, kun $k \in \mathbb{N}$.

(a) Koska generoivat termit $a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$ ja $a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$ kun $k \in \mathbb{N}$ ovat positiivisia niin sarja on selvästi vuorotteleva. Tremien suppenemisen nollaan nähdään esimerkiksi huomaamalla että kun j on pariton, eli $j = 2k-1$, niin

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2k-1}{2}}-1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{j}{2}}-1}$$

ja kun j on parillinen, eli $j = 2k$, niin

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{2}}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{j}{2}}-1}.$$

Tällöin siis

$$0 \leq \lim_{j\to\infty} a_j \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{j}{2}}-1} = 0.$$

(b) Sarjan hajaantuminen nähdään tarkastelemalla $2n$. osasummaa ja huomaamalla että

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} = \frac{\sqrt{k+1}+1-(\sqrt{k+1}-1)}{(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+1}-1)} = \frac{2}{k}$$

kaikilla k, joten

$$\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}a_j$$

$$= \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}}^{=2} + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}}^{=1} + \dots + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}}^{=\frac{2}{n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}.$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}$ hajaantuu. Tällöin myös sarja $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}a_j$ hajaantuu.

(c) Leibnitzin testi vuorotteleville sarjoille ei toimi, sillä termit a_j eivät suppene nollaan monotonisesti, esim. $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{3}-1} = a_3$.

5. Oletuksen nojalla $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ suppenee. Erityisesti sen termit suppenevat kohti nollaa

$$\lim_{j\to\infty} a_j = 0.$$

Verrataan sarjaa $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ sarjaan $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$; koska

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_j^2}{|a_j|} = \lim_{j\to\infty}|a_j| = 0,$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ suppenee lauseen 4.10 nojalla.

6. Sarja on siis muotoa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ missä $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Sen Cauchyn tulo itsensä kanssa on sarja $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, missä

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\, a_{k-j+1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{k-j+2}}{\sqrt{k-j+1}} = (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k-j+1)}}.$$

Tämä sarja on siis myös vuorotteleva mutta se ei suppene sillä sen termit eivät suppene nollaan, sillä (tässä käytetään epäyhtälöä $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$)

$$|c_k| = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k-j+1)}} \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{j+(k-j+1)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1} \to 2.$$

7. Uskotaan vihjeeseen ja lasketaan sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ Cauchyn tulo. Tämä on sarja $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, missä

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\, b_{k-j+1} = \sum_{j=1}^{k} jx^{j-1} \cdot x^{k-j} = \left(\sum_{j=1}^{k} j\right) x^{k-1} = \frac{k(k+1)}{2} x^{k-1}.$$

On jo todettu että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevat itseisesti ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Siispä lauseen 4.20 nojalla $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ suppenee itseisesti ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

8. Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Siispä $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, missä $f(x) = |x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

9. Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}$. Olkoon aluksi $x \neq 0$. Koska $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, niin

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

Toisaalta kun $x = 0$ niin $g_n(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $\lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$. Siispä $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, missä $g(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.