

**Analyysi 3, kesä 2012.**
Harjoitus 3 13.6.2012

1. Suppenevatko sarjat?

$$(a) \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \frac{\log k}{k} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \log \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

2. Suppenevatko sarjat?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \sin \left(\frac{1}{k} \right) \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Suppenevatko sarjat?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^2 + 1} - k) \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} (\sqrt{k^2 + 1} - k).$$

4. Tarkastellaan sarjaa

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$$

(Tämä voidaan kirjoittaa muodollisesti

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \dots$$

missä termit saadaan kaavoilla $a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$ ja $a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, kun $k \in \mathbb{N}$.)

(a) Osoita että sarja on vuorotteleva ja sen termit suppenevat nollaan.

(b) Osoita että kuitenkin sarja hajaantuu.

(c) Miksi Leibnitzin testi vuorotteleville sarjoille ei toimi?

5. Osoita että jos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti niin $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ suppenee.

6. Muodosta suppevan sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Cauchyn tulo itsensä kanssa ja osoita, että tuloksena saatu sarja hajaantuu. (Vihje: Aritmeettisgeometrisen epäyhtälö $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$)7. Olkoon $x \in (-1, 1)$. Osoita että

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k x^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

(Vihje: Muodosta sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ Cauchyn tulo.)KÄÄNNÄ $\rightarrow$

8. Olkoot $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.e.

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} .$$

Mitä funktiota kohti funktiojono $(f_n)_{n=1}^\infty$ suppenee (pisteittäin).

9. Olkoot $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.e.

$$g_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) .$$

Mitä funktiota kohti funktiojono $(g_n)_{n=1}^\infty$ suppenee (pisteittäin).