JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
4. Harjoitusten malliratkaisut

1. Funktioiden välien etäisyys on

$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|\sin x - \cos x\big|.$$

Huomataan että koska molemmat funktiot ovat 2π-jaksollisia niin supremum saavutetaan jollain x_0. Tämän maksimipisteeen täytyy olla funktion $x \mapsto \sin x - \cos x$ ääriarvopiste, joten

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x - \cos x\right)\Big|_{x=x_0} = \cos(x_0) + \sin(x_0) = 0.$$

Toisin sanoen

$$\tan(x_0) = -1,$$

jolloin $x_0 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, jollenkin $n \in \mathbb{N}$. Jokaisella $x_n = -\frac{\pi}{4} + n\pi$

$$\big|\sin x_n - \cos x_n\big| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

joten $d(f,g) = \sqrt{2}$.

2. Olkoon $x \in A$ mielivaltainen. Tällöin tavallisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\big|f(x) - g(x)\big| &\le \big|f(x) - h(x)\big| + \big|h(x) - g(x)\big| \\ &\le \sup_{x\in A}\big|f(x) - h(x)\big| + \sup_{x\in A}\big|h(x) - g(x)\big| \\ &= d(f,h) + d(h,g).\end{aligned}$$

Edellinen epäyhtälö on voimassa kaikilla $x \in A$. Tällöin

$$\sup_{x\in A}\big|f(x) - g(x)\big| \le d(f,h) + d(h,g),$$

joten $d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$.

3. Edellisissä demoissa todettiin jo että $f_n \to f$ pisteittäin missä $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Osoitetaan että suppeneminen on tasaista.

$$\begin{aligned}
d(f_n, f) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_n(x) - f(x)\big| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\Big| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\frac{x^2 + \frac{1}{n} - |x|^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}\Big| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}\Big| \qquad , x^2 \geq 0, |x| \geq 0 \\
&= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$d(f_n, f) = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty,$$

joten $f_n \to f$ tasaisesti.

4. Esimerkiksi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{kun } x \in [0,1] \\ 0 & \text{muulloin .} \end{cases}$$

Tällöin jokainen f_n on selvästi epäjatkuva mutta $f_n \to 0$ tasaisesti, sillä

$$d(f_n, 0) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty.$$

5. Lasketaan ensin raja-funktio. Pisteittäin funktiojono suppenee, kaikilla $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}
n\left((x + \frac{1}{n})^3 - x^3\right) &= n\left(x^3 + 3x^2\frac{1}{n} + 3x\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - x^3\right) \\
&= 3x^2 + 3x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 3x^2,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Rajafunktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ on siis oltava muotoa $f(x) = 3x^2$, (x^3:n derivaatta).

Suppeneminen on tasaista;

$$\begin{aligned}
d(f_n, f) &= \sup_{x\in(-1,1)} \Big|n\left((x + \frac{1}{n})^3 - x^3\right) - 3x^2\Big| \\
&= \sup_{x\in(-1,1)} \Big|3x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\Big| \\
&= \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$d(f_n, f) = \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty$$

joten $f_n \to f$ tasaisesti.

6. Esimerkiksi $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in [n-1,n] \\ 0 & \text{muulloin .} \end{cases}$$

Tällöin

(i) $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_{n-1}^n 1\,dx = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $0 \le f_n(x) \le 1$ kaikilla $x \in [0,\infty)$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja
(iii) $f_n \to 0$ pisteittäin; kun kiinnitetään $x \in [0,\infty)$ niin huomataan että $f_n(x) = 0$ kaikilla $n \ge x$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

7. Todistetaan ensin aputulos. Kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ pätee

(1) $$\big|\cos x_2 - \cos x_1\big| \le |x_2 - x_1|.$$

(Kosini on 1-Lipschitz jatkuva.) Tämä seuraa väliarvolauseesta sillä kun $x_1 < x_2$ niin on olemassa $\xi \in (x_1, x_2)$ s.e.

$$\big|\cos x_2 - \cos x_1\big| = \big|(-\sin\xi)(x_2 - x_1)\big| = \big|\sin\xi\big|\big|x_2 - x_1\big| \le \big|x_2 - x_1\big|.$$

Ratkaistaan nyt tehtävä. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee Analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\Big|n\left(\sin(n+\frac{1}{n}) - \sin x\right) - \cos x\Big| &= n\Big|\int_x^{x+\frac{1}{n}} \cos t\,dt - \frac{1}{n}\cos x\Big| \\
&= n\Big|\int_x^{x+\frac{1}{n}} (\cos t - \cos x)\,dt\Big| \\
&\le n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \big|\cos t - \cos x\big|\,dt \\
&\le n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \big|t - x\big|\,dt \qquad \text{aputuloksen nojalla} \\
&= n\,\Big|_x^{x+\frac{1}{n}} \left(\frac{t^2}{2} - xt\right) \qquad \text{Huom! } t \ge x \\
&= n\left(\frac{(x+\frac{1}{n})^2}{2} - x(x+\frac{1}{n}) - \frac{x^2}{2} + x^2\right) \\
&= n\cdot\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_n(x) - f(x)\big| \le \frac{1}{2n} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty.$$

(Tehtävä ratkeaa myös helpohkosti kun huomaa että kosini on tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.)

8. Rationaaliluvut voidaan siis kirjoittaa muodossa $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Valitaan funktiot $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ s.e.

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x = q_k \\ 0 & \text{muulloin}\ , \end{cases}$$

ja määritellään $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ s.e.

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

Tällöin siis

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in [0,1] \cap \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{muulloin}\ . \end{cases}$$

Tällöin f_n ovat Riemann-integroituvia sillä $f_n(x) = 0$ kaikilla paitsi äärellisen monella $x \in [0,1]$ (f_n ovat lokaalisti vakioita).

Funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{muulloin}\ , \end{cases}$$

joka ei ole Riemann-integroituva (Analyysi 2).