JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
Harjoitus 4 20.6.2012

1. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$. Laske niiden välinen etäisyys $d(f, g)$.

2. Osoita että metriikka $d(\cdot, \cdot)$ toteuttaa kolmioepäyhtälön. Eli että kaikilla (rajoitetuilla) funktioilla $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ pätee

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

3. Olkoot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Osoita että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti.

Totea myös että f_n ovat derivoituvia, mutta rajafunktio f ei sitä ole. (Derivoituvuus ei siis säily tasaisessa suppenemisessa.)

4. Anna esimerkki epäjatkuvista funktioista $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka suppenevat tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5. Olkoot $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\left((x + \frac{1}{n})^3 - x^3\right)$. Osoita että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti. Mikä on rajafunktio f?

6. Anna esimerkki Riemann-integroituvista funktioista $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, joille

(i) $\int_0^{\infty} f_n(x)\, dx = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $0 \leq f_n(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0, \infty)$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$, mutta
(iii) $f_n \to 0$ pisteittäin, muttei tasaisesti.

7. Olkoot $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n\left(\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin x\right)$$

ja $f(x) = \cos x$. Osoita että $f_n \to f$ tasaisesti. (Vihje: Analyysin peruslause.)

8. Anna esimerkki **rajoitetuista** funktioista $f_n, f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, joille

(i) $f_n \to f$ pisteittäin,
(ii) f_n ovat Riemann-integroituvia, mutta
(iii) f ei ole Riemann-integroituva.

(Vihje: Rationaaliluvut voidaan numeroida; $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$)

KÄÄNNÄ →

9. Ylimääräinen Tehtävä. Olkoot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e.

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Olkoon $R > 0$. Osoita, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti joukossa $(-R, R) \subset \mathbb{R}$.

Vihje: Newtonin binomikaava;

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k.$$

Tehtavässä EI saa käyttää eksponenttifunktioita tai logaritmia, sillä tämä ON eksponenttifunktion määritelmä.