JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
5. Harjoitusten malliratkaisut

1.

(a) Funktiosarja suppenee tasaisesti Weierstrassin M-testin nojalla. Tämä seuraa siitä että

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{2^k - 1} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k-1}$ suppenee (vertaa geometriseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$).

(b) Funktiosarja suppenee pisteittäin (itseisesti) muttei tasaisesti. Pisteittäinen suppeneminen nähdään sillä

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{e^x})^k = \frac{1}{e^x - 1}.$$

ja $\frac{1}{e^x} < 1$ kaikilla $x > 0$. Toisaalta suppeneminen ei ole tasaista sillä osasummille $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

$$\begin{aligned} d(f, S_n) &= \sup_{x>0} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \Big| \\ &= \sup_{x>0} \Big| \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} \Big| \\ &= \sup_{x>0} \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} = \infty. \end{aligned}$$

2. Funktio on siis muotoa $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, missä $f_k(x) = \frac{\cos(2^k \pi x)}{3^k}$. Funktioiden f_k arvoille pätee

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{3^k} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

ja derivaatoille $f_k'(x) = -\frac{2^k \pi}{3^k} \sin(2^k \pi x)$ patee

$$|f_k'(x)| \leq \pi \left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Koska molemmat sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \pi \left(\frac{2}{3}\right)^k$ suppenevat niin funktiosarjat $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ suppenevat itseisesti ja tasaisesti Weierstrassin M-testin nojalla. Lauseen 5.3 nojalla f on jatkuvasti derivoituva.

3. Sarja suppenee kun $x \in [-2, 2)$ ja hajaantuu muulloin.

Ensinnäkin suhdetestillä nähdään että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^k}{(k+1)\, 2^{k+1}} \cdot \frac{k\, 2^k}{|x|^{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2},$$

joten sarja ainakin suppenee kun $|x| < 2$ ja hajaantuu kun $|x| > 2$.

Kun $x = 2$, niin sarja on muotoa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$, ja se hajaantuu sillä harmoninen sarja hajaantuu. Kun $x = -2$ niin sarja on muotoa $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$, ja se suppenee sillä vuorotteleva harmoninen sarja suppenee.

4. Sarja suppenee kun $x \leq 0$ ja hajaantuu kun $x > 0$.

Funktiosarja suppenee itseisesti pisteittäin ainakin kun

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1.$$

Tämän näkee vertaamalla sitä geometriseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k$, joka tietenkin suppenee. Edellinen on yhtäpitävää sen kanssa että,

$$(x+1)^2 < (x-1)^2,$$

josta nähdään että $x < 0$. Samoin nähdään että kun $x > 0, x \neq 1$, niin

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > 1.$$

Tällöin sarja hajaantuu, sillä juuritestillä

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{k}}} \cdot \left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \left|\frac{x+1}{x-1}\right| > 1.$$

Jäljelle jää tapaus $x = 0$. Tällöin funktiosarja on vuorotteleva lukusarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}},$$

joka suppenee Leibnitzin ehdon nojalla (tämä on jo käyty ohjauksissa 3).

5. Koska $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, niin

$$f_k(x) = (\sin x)^k (\cos x)^k = \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^k.$$

Siispä

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{2^k} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

joten funktiosarja $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ suppenee tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä Weierstrassin M-testin nojalla. Summafunktio saadaan soveltamalla geometristä summaa pisteittäin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^k = \frac{2}{2-\sin(2x)}.$$

6. Ratkaistaan tehtävä Weierstrassin M-testillä. Funktiosarja on siis $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, missä $f_k(x) = \frac{x}{k(1+kx^2)}$.

Huomataan etta $f_k(-x) = -f_k(x)$, $f_k(x) > 0$ kun $x > 0$, $f_k(0) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = 0$. Tällöin supremum saavutetaan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| = \max_{0<x<\infty} f_k(x) = f_k(x_k)$$

jollakin $x_k \in (0,\infty)$. Etsitään ääriarvopiste x_k. Koska

$$0 = f_k'(x_k) = \frac{1}{k(1+kx^2)} - \frac{2kx^2}{k(1+kx^2)^2} = \frac{1-kx^2}{k(1+kx^2)},$$

niin $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, sillä $x_k \in (0,\infty)$. Siispä

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| = f_k(x_k) = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{k(1+k\cdot\frac{1}{k})} = \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}},$$

joten

$$|f_k(x)| \le \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Koska yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ suppenee, niin $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ suppenee itseisesti ja tasaisesti.

7. Tämäkin ratkeaa Weierstrassin M-testillä. Funktiosarja on siis $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$, missä $f_j(x) = \frac{1}{10^j} s(10^j x)$. Koska kaikilla $y \in \mathbb{R}$, $0 \le s(y) \le 1$, niin

$$|f_j(x)| \le \frac{1}{10^j} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Koska geometrinen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^j}$ suppenee niin funktiosarja suppenee itseisesti ja tasaisesti.

8. Edellisen tehtävän ja lauseen 5.3 nojalla täytyy vain näyttää että jokainen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tähän riittää näyttää että $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Osoitetaan että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

$$|s(y) - s(x)| \le |y - x|,$$

josta jatkuvuus seuraa. (Miksi? Tarkka perustelu jää kotitehtäväksi) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Voidaan olettaa että $s(y) \ge s(x)$. Olkoot $k_y, k_x \in \mathbb{Z}$ s.e.

$$s(y) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |y-k| = |y-k_y| \qquad \text{ja} \qquad s(x) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x-k| = |x-k_x|.$$

Koska $|y-k_y| = \min_{k\in\mathbb{Z}} |y-k| \le |y-k_x|$, niin

$$\begin{aligned} |s(y)-s(x)| = s(y)-s(x) &= |y-k_y| - |x-k_x| \\ &\le |y-k_x| - |x-k_x| \qquad \text{kolmio-epäyhtälö} \\ &\le \big|(y-k_x)-(x-k_x)\big| \\ &= |y-x|. \end{aligned}$$

9. Ylimääräinen Tehtävä. Poikkeuksellisesti tällä kertaa myös ylimääräisen tehtävän ratkaisu hahmotellaan. Tehtävä on sen verran hieno!

Olkoon siis $a \in (0,1]$ ja sen desimaalikehitelmä on

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}.$$

Valitaan jono $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että

$$h_n = \begin{cases} -\frac{1}{10^n} & \text{jos } \ a_n \in \{4, 9\} \\ \frac{1}{10^n} & \text{jos } \ a_n \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}. \end{cases}$$

Idea on siis "häiritä" a:n desimaalikehitelmää yhden numeron verran. Selvästi $h_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

Tällöin (tämä kannattaa käydä itse läpi)

$$f_0(a + h_n) - f_0(a) = s(a + h_n) - s(a) = \pm\frac{1}{10^n}.$$

Siis erotus on joko $\frac{1}{10^n}$ tai $-\frac{1}{10^n}$, riippuen siitä onko $f_0(a) = a$ vai $f(a) = 1 - a$ ja siitä onko $h_n = \frac{1}{10^n}$ vai $h_n = -\frac{1}{10^n}$. Samoin

$$f_1(a + h_n) - f_1(a) = \frac{s(10(a + h_n)) - s(10a)}{10} = \pm\frac{1}{10^n}.$$

Samoin nähdään

$$f_j(a + h_n) - f_j(a) = \frac{s(10^j(a + h_n)) - s(10^j a)}{10^j} = \pm\frac{1}{10^n}$$

kaikilla $j = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$.

Mutta kun $j \geq n$ niin

$$f_j(a + h_n) - f_j(a) = \frac{s(10^j(a + h_n)) - s(10^j a)}{10^j} = 0.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n} &= \frac{1}{h_n}\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(a + h_n) - \sum_{j=0}^{\infty} f_j(a)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \overbrace{\left(\frac{f_j(a + h_n) - f_j(a)}{h_n}\right)}^{=\pm 1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \end{aligned}$$

missä σ_j saa arvoja joko $+1$ tai -1. Summa $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$ ei siis suppene. Siispä erotusosamäärällä $\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$ ei ole raja-arvoa kun $n \to \infty$, eikä f voi olla derivoituva a:ssa.