JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
Harjoitus 5 26.6.2012

1. Tutki suppeneeko funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ pisteittäin tai tasaisesti, kun

(a) $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{\sin^2(kx)}{2^k - 1}$,

(b) $f_k : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{-kx}$.

2. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2^k \pi x)}{3^k}$$

on jatkuvasti derivoituva.

3. Missä joukossa funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k\, 2^k}$$

suppenee pisteittäin.

4. Missä joukossa funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k, \quad x \neq 1$$

suppenee pisteittäin.

5. Olkoot $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. $f_k(x) = (\sin x)^k (\cos x)^k$ kun $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ja $f_0(x) = 1$. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä. Minkä funktion funktiosarja määrää?

6. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1 + kx^2)}$$

suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä.

7. Olkoot $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x) := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$ (ts. $s(x)$ on x:n etäisyys lähimpään kokonaislukuun) ja $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = \frac{1}{10^j} s(10^j x)$. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j$$

suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä.

KÄÄNNÄ →

8. Olkoon $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että summafunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$$

on jatkuva.

9. Ylimääräinen Tehtävä. Olkoon $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ kuten tehtävässä 7. Osoita, että summafunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$$

ei ole derivoituva missään pisteessä.

(Vihje: Riittää osoittaa ettei f ole derivoituva missään pisteessä $a \in (0, 1]$. Tätä varten olkoon $0.a_1a_2a_3\ldots$ pisteen a desimaalikehitys. Väitteen todistamiseksi riittää löytää jono (h_m) s.e. $\lim_{m\to\infty} h_m = 0$ ja erotusosamäärällä $\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$ ei ole raja-arvoa.)