JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
Harjoitus 6 27.6.2012

1. Määritä potenssisarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$$
suppenemissäde.

2. Oletetaan, että sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ suppenemissäde on $R \in (0,\infty)$. Osoita, että

(a) sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{k+1}$ suppenemissäde on R,

(b) sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{2k}$ suppenemissäde on $\sqrt{R}$.

3. Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet?
$$a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!} \qquad b)\ \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k (k+1)(x-1)^k \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2k\, x^{2k-1}.$$

4. Minkä funktion potenssisarjaesitys on tehtävän 3 a) sarja?

5. Olkoon $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ vähenevä lukujono, jolle $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hajaantuu. Mikä on potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde?

6.

(a) Tutki, missä pisteissä on voimassa
$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \ ?$$

(b) Laske
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k (k+1)}.$$

(Vihje: Arvioi jäännöstermiä $R_{n,0} f(x)$.)

7. Osoita, että
$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \dots$$
kun $x \in (-1,1)$.

8. Ylimääräinen Tehtävä. Olkoon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s.e.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{kun } x > 0 \\ 0 & \text{kun } x \le 0. \end{cases}$$

Osoita, että f:llä on kaikkien kertalukujen derivaatat ja että $f^{(n)}(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(Funktiota f ei siis voida esittää potenssisarjana nollan lahellä $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Sanotaan että f ei ole *reaalianalyyttinen*.)