JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
6. Harjoitusten malliratkaisut

1. Suppenemissäde R saadaan suhdetestillä (Lause 5.9)

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^k(k+1)}{(k+1)k!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\ &= e. \end{aligned}$$

2.

(a) Koska $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^{k+1} = (x-x_0)\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ niin kysytty sarja suppenee täsmälleen silloin kun sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ suppenee. Suppenemissäde on siis R.

(b) Määritellään $y = x_0 + (x-x_0)^2$. Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-x_0)^k$ suppenemissäde on R. Tällöin sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^{2k}$ suppenemissäde on $\sqrt{R}$.

3. a) Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ suppenemissäde on $R=\infty$ (koko $\mathbb{R}$). Tällöin tehtävän 2 b) nojalla sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ suppenemissäde on myös $R=\infty$ (edellisessä tehtävässä tosin oletettiin että suppenemissäde on rajoitettu joten tämä päättely tarvitsisi pienen perustelun. Se jääköön lukijan mietittäväksi). Edelleen tehtävän 2 a) nojalla sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$ suppenemissäde on $R=\infty$.

b) Suhdetestillä (Lause 5.9)msaadaan suppenemissäde R

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k(k+1)}{2^{k+1}(k+2)} \\ &= \lim_{k\to\infty} 2\,\frac{k+1}{k+2} = 2. \end{aligned}$$

c) Ensinnäkin sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}2(k+1)\, x^k$ suppenemissäde on

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)}{2(k+2)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = 1. \end{aligned}$$

Taaskin tehtävan 2 kohtien a) ja b) nojalla kysytyn sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2k\, x^{2k-1}$ suppenemissäde on myös $R=1$.

4. Koska $e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$ niin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = xe^{x^2}.$$

5. Suppenemissäde on $R = 1$.

Kun valitaan $x = -1$ niin saadaan sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$, joka suppenee Leibnitzin testin nojalla (Leibnitzin testi vuorotteleville sarjoille). Tällöin suppenemissäteen määritelmästä seuraa että $R \geq 1$.

Toisaalta kaikilla $x \geq 1$ sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hajaantuu, sillä

$$a_k x^k \geq a_k$$

ja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hajaantuu (vertailuperiaate/minoranttiperiaate Lause 4.9). Siispä $R \leq 1$.

6.

(a) Yhtäsuuruus on voimassa kun $x \in (-1, 1]$. (Huom! Tämä on esimerkki tapauksesta, jossa funktio $\log(1 + x)$ on määritelty joukossa $(-1, \infty)$, mutta nollassa sen potenssisarjaesitys on voimassa vain joukossa $(-1, 1]$.)

Geometrisen sarjan summan nojalla kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

Integroimalla yli välin $[0, x]$ (tai välin $[x, 0]$ jos x negatiivinen) saadaan

$$\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n,0}f(x)$$

kaikilla $x > -1$, missä

$$R_{n,0}f(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt.$$

Kysytty yhtäsuuruus on siis voimassa täsmälleen silloin kun $\lim_{n\to\infty} |R_{n,0}f(x)| = 0$.

Kun $x > 1$ niin kaikilla $t \in [0, x]$ pätee $\frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{1+x}$, joten

$$\begin{aligned}
\left|R_{n,0}f(x)\right| &= \left|\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt\right| \\
&\geq \frac{1}{1+x}\int_0^x t^{n+1}\, dt \\
&= \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1+x)} \\
&= \frac{1}{1+x}\frac{e^{(n+2)\log x}}{n+2} \to \infty \quad \text{kun } n \to \infty,
\end{aligned}$$

sillä eksponenttifunktio kasvaa nopeammin kuin polynomi. Yhtäsuuruus ei siis voi olla voimassa.

Kun $|x| < 1$, niin kaikilla $t \in [0, x]$ (tai $t \in [x, 0]$) pätee $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1-|x|}$, joten

$$\begin{aligned} \left|R_{n,0}f(x)\right| &\leq \frac{1}{1-|x|}\left|\int_0^x t^{n+1}\,dt\right| \\ &= \frac{1}{1-|x|}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty, \end{aligned}$$

joten yhtäsuuruus on voimassa. Tässä tapauksessa potenssisarja suppenee itseisesti pisteittäin.

Jäljelle jää tapaus $x = 1$. Tällöin kaikilla $t \in [0, 1]$ pätee $\frac{1}{1+t} \leq 1$, joten

$$\begin{aligned} \left|R_{n,0}f(1)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 t^{n+1}\,dt\right| \\ &= \frac{1}{(n+2)} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty, \end{aligned}$$

joten yhtäsuuruus on voimassa.

(b) Kun tarkastellaan edellistä potenssisarjaa pisteessä $x = -\frac{1}{4}$ niin saadaan

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{3}{4}\right) = \log(1 - \frac{1}{4}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{4^{k+1}(k+1)} = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k(k+1)}. \end{aligned}$$

Siispä

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k(k+1)} = -4\log\left(\frac{3}{4}\right) = 4\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

7. Muistetaan että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(-x)^k}^{g_k(x)} = \frac{1}{1+x} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}}^{f_k(x)} = \log(1+x)$$

kun $x \in (-1, 1)$. Molemmat sarjat suppenevat itseisesti pisteittäin välillä $(-1, 1)$. Niiden Cauchyn tulo on sarja $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)$, missä (huomaa että nyt summaus alkaa indeksistä $j = 0$)

$$h_k(x) = \sum_{j=0}^{k} f_j(x)g_{k-j}(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1} \cdot (-1)^{k-j}x^{k-j} = (-1)^k x^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}.$$

Koska sarjat suppenevat itseisesti, niin Lauseen 4.20 nojalla

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+x)}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}\right)(-1)^k x^{k+1} \\ &= x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots \end{aligned}$$

(Huomaa että itseinen suppeneminen on tärkeää Cauchyn tulon kannalta, minkä vuoksi tapaus $x = 1$ jää pois.)