

**Analyysi 3, kesä 2012.****Ohjaus 4 18.6.2012**

1. Olkoot $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ja $g(x) = x^2$. Laske niiden välinen etäisyys $d(f, g)$.
2. Olkoot $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettuja funktioita. Osoita että jos $d(f, g) = 0$, niin $f = g$.
3. Olkoot $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ ja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Osoita, että
 - (a) $f_n \rightarrow f$ tasaisesti.
 - (b) $f_n^2 \rightarrow f^2$ pisteittäin muttei tasaisesti.

4. Olkoot $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}.$$

Osoita, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti.

5. Olkoot $f_n, f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $f_n(x) = \sqrt{n^2 + x^2} - n$. Osoita että
$$f_n \rightarrow 0 \quad \text{tasaisesti.}$$