JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
Lopputentin 22.8.2012 malliratkaisut

1. Nyt

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad f'''(x) = \frac{-3x}{(1+x^2)^{5/2}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-3+12x^2}{(1+x^2)^{7/2}},$$

joten

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = -3.$$

Siispä

$$T_{4,0}f(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4.$$

Taylorin lauseen nojalla $f(x) = T_{2,0}f(x) + o(x^2)$, joten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{T_{2,0}f(x) - 1 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x^2 - 1 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2.

(a) Suppenee.
Tämä seuraa Leibnitzin ehdosta vuorotteleville sarjoille. Kuvaus $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ on selvästi vähenevä ja positiivinen välillä $(0, \infty)$. Lisäksi koska $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, jono $(\frac{1}{\sqrt{k}})$ toteuttaa kaikki Leibnitzin ehdot vuorotteleville sarjoille.

(b) Ei suppene.
Tämä nähdään integraalitestin avulla. Ensinnäkin kuvaus $x \to \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$ on vähenevä, positiivinen ja jatkuva välillä $[1, \infty)$. Koska

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}\,dx = \Big|_1^\infty \log\left(\log(x+1)\right) = \infty,$$

niin integraalitestin nojalla sarja hajaantuu.

3.

(a) Epätosi
Valitaan $f_j(x) = x^j$, jolloin $f_j \to f$ pisteittäin, missä

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in [0,1) \\ 0 & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Kuitenkin $d(f_j, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_j(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^j| = 1$, joten funktiojono ei suppene tasaisesti.

(b) Tosi

Kiinnitetään $x_0 \in [0,1]$. Tällöin $|f_j(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f_j(x) - f(x)| = d(f_j, f) \to 0$. Tällöin siis $f_j(x_0) \to f(x_0)$, joten funktiosarja suppenee pisteittäin.

(c) Epätosi

Valitaan luentojen "kolmioesimerkki", eli

$$f_j(x) = \begin{cases} j^2 x & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{j}] \\ 2j - j^2 x & \text{kun } x \in (\frac{1}{j}, \frac{2}{j}] \\ 0 & \text{kun } x \in (\frac{2}{j}, 1], \end{cases}$$

jolloin $f_j \to 0$ pisteittäin. Kuitenkin $\int_0^1 f_j(x)\,dx = 1$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

4.

(a) Potenssisarjojen suhdekaavalla saadaan

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)k!}{k!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty.$$

Suppenemissäde on siis $R = \infty$, joten sarja suppenee koko $\mathbb{R}$:ssä.

(b) Taaskin suhdekaavalla saadaan

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{(k+1)k!}{(k+1)^k(k+1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right)^{-1} = \left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Suppenemissäde on siis $R = \frac{1}{e}$,

5. Ratkaistaan tehtävä Weierstrassin M-testillä. Funktiosarja on siis $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, missä

$$f_k(x) = \frac{x}{k(1+x^2)^k}.$$

Huomataan etta $f_k(-x) = -f_k(x)$, $f_k(x) > 0$ kun $x > 0$, $f_k(0) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = 0$. Tällöin supremum saavutetaan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| = \max_{0<x<\infty} f_k(x) = f_k(x_k)$$

jollakin $x_k \in (0,\infty)$. Etsitään ääriarvopiste x_k. Koska

$$0 = f_k'(x_k) = \frac{1}{k(1+x_k^2)^k} - \frac{2kx_k^2}{k(1+x_k^2)^{k+1}} = \frac{1-(2k-1)x_k^2}{k(1+x_k^2)^{k+1}},$$

niin $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$, sillä $x_k \in (0, \infty)$. Siispä

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| &= f_k(x_k) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2k-1}}}{k(1+\frac{1}{2k-1})^k} \\ &= \frac{1}{k\sqrt{2k-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\frac{1}{2k-1})^k}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k\sqrt{2k-1}}.\end{aligned}$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{2k-1}}$ suppenee vertailuperiaatteen (vertailemalla yliharmoniseen sarjaan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$) nojalla sillä

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\sqrt{2k-1}} \left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siispa $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ suppenee tasaisesti ja itseisesti Weierstrassin M-testin nojalla.