JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3 (Vesa Julin)
Lopputentti 22.8.2012
Vastaa kaikkiin tehtäviin.

1. Laske funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$
neljäs Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$, eli $T_{4,0}f(x)$. Laske myös
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}. \qquad (6p)$$

2. Suppenevatko sarjat? (6p)
$$a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} .$$

3. Olkoot $f, f_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, funkioita. Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta ja mitkä epätosia? (Perustele lyhyesti tai anna vastaesimerkki.) (6p)

(a) Jos $f_j \to f$ pisteittäin, niin $f_j \to f$ tasaisesti.
(b) Jos $f_j \to f$ tasaisesti, niin $f_j \to f$ pisteittäin.
(c) Jos $f_j \to f$ pisteittäin, niin $\lim_{j\to\infty} \int_0^1 f_j(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

4. Määritä potenssisarjojen suppenemissäteet? (6p)
$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k .$$

5. Osoita, että funktiosarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(1+x^2)^k}$$
suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä. (6p)

KÄÄNTÖPUOLELLA MUUTAMIA KURSSILLA KÄYTYJÄ TULOKSIA →

Lause (Taylorin lauseen integraalimuoto)
Olkoon funktio $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-kertaa jatkuvasti derivoituva ja olkoon $x_0 \in (a,b)$. Tällöin

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in (a,b),$$

missä

$$R_{n,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Lause (Suhde- ja juuritesti)
Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$. Jos

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} < 1 \qquad \text{tai} \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} < 1$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti. Jos

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} > 1 \qquad \text{tai} \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} > 1$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

Lause
Potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ suppenemissäteelle R pätee

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{|a_j|}} \qquad \text{tai} \qquad R = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|}},$$

jos em. raja-arvo on olemassa.