JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3, kesä 2012.
Lopputentin 4.7.2012 malliratkaisut

1. Tämä saadaan joko suoraan laskemalla annetun funktion derivaatat tai sitten käyttämällä geometrisen sarjan summaa,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k .$$

(a) Geometrisen sarjan summalla saadaan

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k ,$$

josta funkion f derivaatat ja Taylorin polynomi $T_{4,0}f(x)$ voidaan suoraan lukea (esim Lause 5.11)

$$T_{4,0}f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

(b) Samalla tavalla,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x-1}{2}\right) + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^4\right),$$

josta nähdään

$$T_{4,1}f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \frac{1}{32}(x-1)^4.$$

2.

(a) TOSI.
Sarja suppenee kun osasummien $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ muodostama jono suppenee. Eli $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Tällöin

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 \quad \text{kun } n \to \infty.$$

(b) EPÄTOSI.
Vastaesimerkiksi kelpaa vanha tuttu harmoninen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$.

(c) EPÄTOSI.
Vastaesimerkki; vaihteleva aliharmoninen sarja $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{j}}$ suppenee Leibnitzin ehdon nojalla.

3.

(a) Ei suppene.

Verrataan sarjaa harmoniseen sarjaan $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$, joka siis hajaantuu. Koska

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{j}\right)}{\frac{1}{j}} = 1,$$

niin vertailuperiaatteen nojalla sarja hajaantuu.

(b) Suppenee.

Suhdetestin nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)k!}{(k+1)^k(k+1)}}{\frac{k!}{k^k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \\ &= \frac{1}{e} < 1,\end{aligned}$$

sarja siis suppenee.

4. Koska

$$|f_k(x)| = \Big|\frac{\sin(kx)}{2^k}\Big| \leq \frac{1}{2^k} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

ja koska geometrinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla annettu funktiosarja suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä.

Toisaalta

$$|f_k'(x)| = \Big|\frac{k\,\cos(kx)}{2^k}\Big| \leq \frac{k}{2^k} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

ja koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ suppenee juuri-tai suhdetestin nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

niin derivaattajono $(f_k')_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti. Kurssin lauseen (Laue 5.3) nojalla summafunktio on jatkuvasti derivoituva.

5.

(a) Funktiojono $(f_j)_{j=1}^{\infty}$, missä $f_j : A \to \mathbb{R}$ ja $j \in \mathbb{N}$, suppenee pisteittain kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ jos

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Funktiojono $(f_j)_{j=1}^{\infty}$, missä $f_j : A \to \mathbb{R}$ ja $j \in \mathbb{N}$, suppenee tasaisesti kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ jos niiden välinen etäisyys suppenee kohti nollaa ts.

$$\lim_{j\to\infty} d(f_j, f) = \lim_{j\to\infty} \sup_{x\in A} \big|f_j(x) - f(x)\big| = 0.$$

(b) Esimerkiksi käy mm. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_k(x) = k \quad \text{kaikilla } x \in R, \qquad \text{tai} \quad f_k(x) = \frac{x}{k}, \qquad \text{tai} \quad f_k(x) = \sin\left(\frac{x}{k}\right).$$

Kaikilla em. funktiojonoilla derivaattajono $(f_k')_{k=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota. Perustelu jää harjoitustehtäväksi.