JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 3
Epilog: Lopputentti 4.7.2012
Vastaa kaikkiin tehtäviin.

1. Laske funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ neljäs Taylorin polynomi

(a) pisteessä $x_0 = 0$, $T_{4,0}f(x)$, (3p)
(b) pisteessä $x_0 = 1$, $T_{4,1}f(x)$. (3p)

2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta ja mitkä epätosia? (Perustele lyhyesti tai anna vastaesimerkki.) (6p)

(a) Jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$,
(b) Jos $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee.
(c) Jos sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee, niin myös $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ suppenee

3. Suppenevatko sarjat? (Muista perustella vastauksesi!) (6p)

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\ .$$

4. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$$

suppenee tasaisesti koko $\mathbb{R}$:ssä. Onko summafunktio jatkuvasti derivoituva? (6p)

5.

(a) Mikä on funktiojonon pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen määritelmä? (2p)
(b) Anna esimerkki jatkuvasti derivoituvista funktioista $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, joille derivaattajono $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti mutta funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene tasaisesti. (4p)

KÄÄNTÖPUOLELLA MUUTAMIA KURSSILLA KÄYTYJÄ TULOKSIA →

Lause (Taylorin lauseen integraalimuoto)
Olkoon funktio $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-kertaa jatkuvasti derivoituva ja olkoon $x_0 \in (a, b)$. Tällöin

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in (a, b),$$

missä

$$R_{n,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Lause (Suhde- ja juuritesti)
Olkoot $a_j \in \mathbb{R}$. Jos

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} < 1 \qquad \text{tai} \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} < 1$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ suppenee itseisesti. Jos

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} > 1 \qquad \text{tai} \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} > 1$$

niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ hajaantuu.

Lause
Potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j$ suppenemissäteelle R pätee

$$R = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{|a_j|}} \qquad \text{tai} \qquad R = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|}},$$

jos em. raja-arvo on olemassa.