1 Peruslaskuvalmiudet

1.1 Lukujoukot

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ on **luonnollisten lukujen** joukko (0 mukana, jos tarvitaan),

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ on **kokonaislukujen** joukko,

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ on **rationaalilukujen** joukko, missä merkintä $m, n \in \mathbb{Z}$ tarkoittaa, että m ja n ovat kokonaislukuja, eli kuuluvat kokonaislukujen joukkoon.

$\mathbb{R}$ on **reaalilukujen** joukko, joka sisältää rationaalilukujen lisäksi myös **irrationaaliluvut**.

Edellisen lukujoukon luvut sisältyvät aina seuraavaan lukujoukkoon, joten

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Tässä esimerkiksi merkintä $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ luetaan, että luonnolliset luvut ovat kokonaislukujen **osajoukko**.

Esimerkki 1.1. Luvut $0,333\ldots = 1/3$ ja $0,142857142857\ldots = 1/7$ ovat rationaalilukuja. Luvut $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ ja $\pi = 3,14159265\ldots$ ovat irrationaalilukuja, sillä niitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä eli murtolukuna m/n. Huomaa, että jokaisen rationaaliluvun desimaalimuoto on joko päättyvä tai jaksollinen. Irrationaalilukujen desimaalimuoto on aina päättymätön ja jaksoton.

Reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$ havainnollistetaan lukusuoralla. Reaalilukuvälejä merkitään seuraavasti.

Välin merkintä	Sisältää reaaliluvut x, joille on voimassa	Graafinen esitys
$[a, b]$ (suljettu väli)	$a \leq x \leq b$	kuva puuttuu
$(a, b]$ (puoliavoin väli)	$a < x \leq b$	kuva puuttuu
$[a, b)$ (puoliavoin väli)	$a \leq x < b$	kuva puuttuu
(a, b) (avoin väli)	$a < x < b$	kuva puuttuu
$[a, \infty)$	$x \geq a$	kuva puuttuu
(a, ∞)	$x > a$	kuva puuttuu
$(-\infty, a)$	$x < a$	kuva puuttuu
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	kuva puuttuu
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	kuva puuttuu

Esimerkki 1.2. Väli $[-1, 3)$ tarkoittaa niitä reaalilukuja x, joille on voimassa $-1 \leq x < 3$. Graafinen esitys: kuva puuttuu.

1.2 Potenssi

Olkoon a reaaliluku ($a \in \mathbb{R}$) ja n luonnollinen luku ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Potenssimerkintä on

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kappaletta}},$$

missä luku a on **kantaluku** ja n on **eksponentti**.

Huomautus 1.3.

$$a^0 = 1, \text{ missä } a \neq 0$$

ja

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ missä } a \neq 0.$$

Potensseille on voimassa seuraavat laskusäännöt ($a, b \in \mathbb{R}$ ja $m, n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \ a \neq 0 \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.4.

$$\frac{2^5 \cdot 3^5}{6^4} = \frac{(2 \cdot 3)^5}{6^4} = \frac{6^5}{6^4} = 6^{5-4} = 6^1 = 6.$$

1.3 Prosenttilaskuja

Prosentti on sadasosa

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Huomaa, että prosentti ei ole mittayksikkö, vaan sadasosan merkintätapa.

Luvun a **prosenttiosuus** luvusta b on

$$\frac{a}{b} \, (\cdot 100\%) \, .$$

Esimerkki 1.5. Kuinka monta prosenttia luku 6 on luvusta 25?

Ratkaisu:

$$\frac{6}{25} = 0,24 = 24\% \left(= \frac{24}{100}\right).$$

Jos suure on muuttunut arvosta a_1 arvoon a_2, vastaava **prosenttimuutos** on

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} \, (\cdot 100\%) \, .$$

Toisinaan muutos ilmoitetaan **prosenttiyksikköinä**. Muutos prosenttiyksikköinä lasketaan kahden prosenttiluvun erotuksena. Esimerkiksi Ylen kuntavaalikyselyn mukaan Perussuomalaisten kannatus syksyn 2012 kuntavaaleissa on $15,8\%$, kun edellisissä kuntavaaleissa kannatus oli $5,4\%$. Puolueen kannatus nousisi silloin $10,4$ prosenttiyksikköä. Kuinka suuri muutos olisi prosentteina, jos oletetaan, että vaaleissa annettujen äänien määrä on sama?

1.4 Polynomit

Muuttujan x **astelukua** n **oleva polynomi** $P(x)$ on

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

missä reaaliluvut $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ ovat vakioita, korkeimman asteen termin kerroin $a_n \neq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 1.6.

$$7x^6 + 4x^4 - 2x^3 + x - 1$$

on kuudennen asteen polynomi. Sen kuudennen asteen **termi** on $7x^6$, jonka **kerroin** on 7 ja **muuttujaosa** x^6.

Polynomien summa ja erotus lasketaan yhdistämällä termit, joilla on sama muuttujaosa.

Esimerkki 1.7.

$$\begin{aligned}
& -6x^5 + 4x^4 - x + 7 + \left(-8x^4 + 2x - 3\right) - \left(-2x^5 - 2x^2 + 1\right) = \\
& -6x^5 + 4x^4 - x + 7 - 8x^4 + 2x - 3 + 2x^5 + 2x^2 - 1 = \\
& -4x^5 - 4x^4 + 2x^2 + x + 3
\end{aligned}$$

Polynomien kertolasku lasketaan kertomalla kertojapolynomin jokaisella termillä kerrottavan polynomin kaikki termit ja laskemalla saadut tulot yhteen.

Esimerkki 1.8.

$$\begin{aligned}
& \left(4x^3 - 2x\right) \cdot \left(-x^2 + 3x - 2\right) = \\
& 4x^3 \cdot \left(-x^2\right) + 4x^3 \cdot 3x + 4x^3 \cdot (-2) - 2x \cdot \left(-x^2\right) - 2x \cdot 3x - 2x \cdot (-2) = \\
& -4x^5 + 12x^4 - 8x^3 + 2x^3 - 6x^2 + 4x = \\
& -4x^5 + 12x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 4x
\end{aligned}$$

Seuraavat **muistikaavat** on osattava ulkoa ja opittava tunnistamaan laskuissa.

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Muistikaavat todistetaan oikeiksi ensimmäisissä ohjauksissa laskemalla kertolaskut.

Kun polynomi jaetaan tekijöihin, se esitetään kahden tai useamman polynomin tulona. Polynomi voidaan jakaa tekijöihin esimerkiksi ottamalla yhteinen tekijä tai käyttämällä yllä olevia muistikaavoja "toiseen suuntaan".

Esimerkki 1.9. Jaa tekijöihin

(a) $x^2 - 4x$,

(b) $16x^2 - 8x + 1$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad x^2 - 4x = x\,(x-4), \\ &\text{(b)} \quad 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 = (4x-1)^2 = (4x-1)(4x-1). \end{aligned}$$

1.5 Rationaalilausekkeet

Rationaalilauseke on kahden polynomin osamäärä. Se ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa. Esimerkiksi

$$\frac{4x^4 - 2x^3 - 1}{x+1}$$

on rationaalilauseke, joka ei ole määritelty, kun $x + 1 = 0$, eli kun $x = -1$.
Rationaalilauseketta voidaan sieventää jakamalla osoittaja ja nimittäjä niiden yhteisellä tekijällä, jos sellainen löytyy.

Esimerkki 1.10. Sievennä lauseke

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1},$$

joka on määritelty, kun $x^2 - 1 \neq 0$, eli kun $x \neq \pm 1$. Ratkaisu:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Huomaa muistikaavojen käyttö toiseen suuntaan jaettaessa osoittajan ja nimittäjän polynomit tekijöihin.

Rationaalilausekkeiden summa, erotus, tulo ja osamäärä lasketaan kuten murtolukujenkin. Yhteen- ja vähennyslaskussa lausekkeet lavennetaan samannimisiksi, jonka jälkeen osoittajat lasketaan yhteen tai vähennetään toisistaan. Kertolaskussa osoittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään. Rationaalilausekkeiden jakolaskussa jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

Esimerkki 1.11. Rationaalilausekkeet ovat määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{x}{x-2} &= \frac{3\,(x-2)}{x\,(x-2)} - \frac{x \cdot x}{x\,(x-2)} = \frac{3\,(x-2)}{x\,(x-2)} - \frac{x^2}{x\,(x-2)} \\ &= \frac{3\,(x-2) - x^2}{x\,(x-2)} = \frac{-x^2 + 3x - 6}{x^2 - 2x}. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.12. Rationaalilausekkeet ovat määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq -1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x-1}{x+1} &= \frac{(x^2-1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-1)}{x(x+1)}\\ &= \frac{(x-1)(x-1)}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}.\end{aligned}$$

1.6 Funktio

Funktio eli **kuvaus** f joukosta A joukkoon B ($f\colon A \to B$) on sääntö, joka liittää jokaiseen **määrittelyjoukon** $\mathcal{M}_f = A$ alkioon täsmälleen yhden **maalijoukon** B alkion. Tällä kurssilla käsiteltävien funktioiden määrittelyjoukkona ja maalijoukkona on aina reaalilukujen joukko tai jokin sen osajoukko (ts. $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$).

kuva puuttuu

Funktion f **arvojoukko** $\mathcal{A}_f$ koostuu funktion saamista arvoista. Arvojoukko on aina funktion maalijoukon osajoukko, mutta nämä joukot eivät välttämättä ole samoja.

Esimerkki 1.13. $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $p(x) = x^2 + 3$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja maalijoukko on $\mathbb{R}$.
- **Funktion arvo** esimerkiksi pisteessä -1 on $p(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$.
- Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla luvuilla x, ei funktio p voi saada pienempiä arvoja kuin $0^2 + 3 = 3$. Toisaalta se voi saada miten suuria arvoja tahansa, kun x on riittävän iso tai pieni reaaliluku. Siten funktion p arvojoukko $\mathcal{A}_p$ on reaalilukujen osajoukko: väli $[3, \infty)$.

Funktion $f\colon A \to B$ ($A, B \subset \mathbb{R}$) **kuvaaja** eli **graafi** muodostuu xy-tason pisteistä $(x, f(x))$, missä x "käy läpi" kaikki määrittelyjoukon luvut ja $y = f(x)$, eli vastaavat y-koordinaatit saadaan funktion arvoista.

Esimerkki 1.14. Kuvaan on piirretty kaikilla reaaliluvuilla määritellyn ensimmäisen asteen polynomifunktion (eli suoran) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ kuvaaja (kuva puuttuu). Mennään esimerkiksi x-akselilla kohtaan, jossa $x = 2$. Koska $f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + 1 = 2$, niin piste $(2, 2)$ on funktion kuvaajalla. Vastaavasti esim. kun $x = -2$, niin $f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2) + 1 = 0$, joten piste $(-2, 0)$ on funktion kuvaajalla.

Esimerkin 1.13. funktion $p(x) = x^2 + 3$ kuvaaja näyttää tältä (kuva puuttuu).

Ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktioiden kuvaajien, eli **suorien** ja **paraabelien** piirtämisestä lisää myöhemmin.