2 Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

Muuttujan x **ensimmäisen asteen yhtälöksi** sanotaan yhtälöä, joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$ax + b = 0,$$

missä vakiot a ja b ovat reaalilukuja ($a, b \in \mathbb{R}$) ja $a \neq 0$.

Esimerkki 2.1. Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } 4\,(x-2) + x = 7x + \frac{1}{2}, \qquad \text{b) } 2 - \frac{4-x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{2}{3}.$$

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned}
4\,(x-2) + x &= 7x + \frac{1}{2} \\
4x - 8 + x &= 7x + \frac{1}{2} \\
5x - 7x &= \frac{1}{2} + 8 \\
-2x &= \frac{17}{2} \\
x &= -\frac{17}{4} = -4\,\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Saatu ratkaisu, eli **juuri** toteuttaa yhtälön. Ratkaisu voidaan tarkistaa sijoittamalla se erikseen alkuperäisen yhtälön molemmille puolille.

b)

$$\begin{aligned}
2 - \frac{4-x}{3} + \frac{x}{6} &= \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \\
6 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{4-x}{3} + 6 \cdot \frac{x}{6} &= 6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{2}{3} \\
12 - 2(4-x) + x &= 3x + 4 \\
12 - 8 + 2x + x &= 3x + 4 \\
4 + 3x &= 3x + 4 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla eli se on **identtisesti tosi**. Yhtälön ratkaisuna on siten kaikki reaaliluvut $x \in \mathbb{R}$. Jos yhtälöä ratkaistaessa päädytään tilanteeseen $0 = c$, missä $c \neq 0$, sanotaan, että yhtälö on **identtisesti epätosi**. Silloin yksikään reaaliluku x ei toteuta yhtälöä, eli yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan kuten vastaava yhtälökin. On kuitenkin muistettava, että epäyhtälömerkin suunta vaihtuu, kun epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan puolittain negatiivisella luvulla, jotta epäyhtälöiden yhtäpitävyys säilyy.

Esimerkki 2.2. Ratkaise kaksoisepäyhtälö

$$2x - 4 \leq 3x + 4 < 8 - x.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 2x - 4 \leq 3x + 4 &\quad \text{ja} \quad 3x + 4 < 8 - x \\ -x \leq 8 &\quad \text{ja} \quad 4x < 4 \\ x \geq -8 &\quad \text{ja} \quad x < 1 \end{aligned}$$

Yhdistetään saadut epäyhtälöiden ratkaisut, jolloin kaksoisepäyhtälön ratkaisuksi saadaan $-8 \leq x < 1$. Graafinen esitys: kuva puuttuu

2.2 Toisen asteen yhtälö

Palautetaan ensin mieleen peruskoulusta ja lukiosta tuttu neliöjuuren määritelmä.

Luvun $a \geq 0$ neliöjuuri, $\sqrt{a}$ on se ei-negatiivinen luku, joka toteuttaa ehdon $(\sqrt{a})^2 = a$. Toisin sanoen se ei-negatiivinen luku, joka itsellään kerrottuna on a. Lukua a sanotaan **juurrettavaksi**.

Neliöjuuren ominaisuuksiin palataan tarkemmin neliöjuuriyhtälöiden ja -epäyhtälöiden yhteydessä.

Muuttujan x **toisen asteen yhtälö** on muotoa

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

missä vakiot a, b ja c ovat reaalilukuja ($a, b, c \in \mathbb{R}$) ja $a \neq 0$.

i) Vaillinainen toisen asteen yhtälö, jossa $b = 0$:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 225 &= 0 \\ 9x^2 &= 225 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} = \pm 5 \end{aligned}$$

ii) Vaillinainen toisen asteen yhtälö, jossa $c = 0$:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x &= 0 \\ x(3x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisuna on $x = 0$ tai $3x + 2 = 0$, eli $x = -2/3$. Ratkaisun perusteluna on **tulon nollasääntö**: tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin tulontekijöistä on nolla.

iii) Täydellinen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$, jossa a, b ja $c \neq 0$:

Yleinen toisen asteen yhtälön ratkaisukaava on

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Huomaa, että ratkaisukaava on voimassa myös tapauksissa i) ja ii).

Ratkaisukaavan juurrettavaa $b^2 - 4ac$ sanotaan **diskriminantiksi** ja sitä merkitään kirjaimella D. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä (tällä kurssilla ei käsitellä kompleksilukuja) riippuu diskriminantin arvosta seuraavasti:

Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi eri juurta.
Jos $D = 0$, yhtälöllä on yksi juuri (ns. kaksoisjuuri).
Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 2.3. Ratkaise yhtälö

$$-x^2 + 3x + 3 = 5.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 3 &= 5 \\ -x^2 + 3x - 2 &= 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \end{aligned}$$

Siten yhtälön ratkaisuna on $x = \dfrac{-3+1}{-2}$, eli $x = 1$ tai $x = \dfrac{-3-1}{-2}$, eli $x = 2$. Ratkaisut voidaan (ja kannattaa) tarkistaa sijoittamalla ne alkuperäiseen yhtälöön.

2.3 Toisen asteen epäyhtälö

Toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen perustuu sen geometriseen tulkintaan: Siirretään ensin kaikki termit samalle puolelle ja ratkaistaan toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nollakohdat yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$. Koska toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on aina paraabeli, voidaan epäyhtälön ratkaisu päätellä funktion nollakohtien perusteella. Paraabelin aukeamissuunnan määrää toisen asteen termin kerroin a seuraavasti:

Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.
Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

Esimerkki 2.4. Ratkaise epäyhtälö

$$-x^2 + 3x - 2 \leq 0.$$

Ratkaisu: Ratkaistaan ensin vastaava yhtälö, eli määritetään toisen asteen polynomifunktion $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ nollakohdat:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Tämä tehtiin jo esimerkissä 2.3, jolloin ratkaisuksi saatiin, että $x = 1$ tai $x = 2$. Siten funktion f nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 2$, eli funktion f kuvaaja (paraabeli) leikkaa x-akselin kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$. Koska toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen, aukeaa paraabeli alaspäin. Näin ollen epäyhtälö $-x^2 + 3x - 2 \leq 0$ toteutuu, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 2$. KUVA PUUTTUU

2.4 Korkeamman asteen yhtälö

Polynomin jakaminen tekijöihin nollakohtien avulla: Muuttujan x polynomi $P(x)$ on jaollinen **binomilla** (= polynomi, jossa on kaksi termiä) $x - x_0$ täsmälleen silloin, kun $x_0 \in \mathbb{R}$ on polynomin nollakohta, eli $P(x_0) = 0$. Tähän perustuu esimerkiksi toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin sen nollakohtien avulla:

Jos toisen asteen polynomilla $P(x) = ax^2 + bx + c$ on nollakohdat $x_1 \in \mathbb{R}$ ja $x_2 \in \mathbb{R}$, niin

$$P(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Esimerkki 2.5. Esimerkin 2.3 toisen asteen polynomi $-x^2+3x-2$ voidaan jakaa tekijöihin sen nollakohtien avulla seuraavasti:

$$-x^2 + 3x - 2 = -1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2),$$

missä 1 ja 2 ovat esimerkissä 2.3 ratkaistut nollakohdat ja -1 on toisen asteen termin kerroin. Huomaa, että polynomi on siis jaollinen (jako menee tasan) binomeilla $x - 1$ ja $x - 2$. Tällä kurssilla ei kuitenkaan käsitellä polynomin jakamista jakokulmassa.

Astetta n oleva polynomi voidaan jakaa tekijöihin sen nollakohtien $x_1, \ldots, x_n$ (jos sillä on n nollakohtaa) avulla vastaavalla tavalla:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Korkeamman asteen yhtälön ratkaisemiseen voidaan yleensä soveltaa tekijöihin jakoa ja tulon nollasääntöä. Tekijäpolynomien löytäminen on vaikein vaihe. Joskus nollakohtia voidaan arvata ja suorittaa polynomien jakamista jakokulmassa. Tällä kurssilla käydään korkeamman asteen yhtälön ratkaisemisesta vain erikoistapaus ns. **bikvadraattisen yhtälön** ratkaiseminen. Bikvadraattinen yhtälö on neljännen asteen yhtälö, josta puuttuu ensimmäisen ja kolmannen asteen termit.

Esimerkki 2.6. Ratkaise yhtälö

$$x^4 + 2x^2 - 15 = 0$$

Ratkaisu: Sijoitetaan yhtälöön apumuuttuja $x^2 = u$, jolloin saadaan u:n suhteen toisen asteen yhtälö.

$$u^2 + 2u - 15 = 0$$
$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2},$$

josta saadaan $u = 3$ tai $u = -5$. Palataan takaisin muuttujaan x:

$$x^2 = 3 \text{ tai } x^2 = -5.$$

Siten yhtälön ratkaisuna on $x = \pm\sqrt{3}$.

2.5 Murtoyhtälö ja -epäyhtälö

Murtoyhtälö on yhtälö, jossa esiintyy rationaalilausekkeita. Luvussa 1.5 opittiin, että rationaalilauseketta ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa. Kun ratkaistaan murtoyhtälöä on tarkistettava, että saadut juuriehdokkaat toteuttavat myös murtoyhtälön määrittelyn.

Esimerkki 2.7. Ratkaise yhtälö

$$\frac{5}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{x^2+16}{x^2-4}$$

Ratkaisu: Yhtälö on määritelty, kun $x - 2 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ ja $x^2 - 4 \neq 0$, eli kun $x \neq \pm 2$. Ratkaistaan yhtälö poistamalla siitä nimittäjät kertomalla se puolittain sopivalla lausekkeella. Koska $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, kelpaa se kertojaksi.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x-2} - \frac{2}{x+2} &= \frac{x^2+16}{x^2-4} \\
\frac{5(x+2)(x-2)}{x-2} - \frac{2(x+2)(x-2)}{x+2} &= x^2 + 16 \\
5x + 10 - 2x + 4 &= x^2 + 16 \\
-x^2 + 3x - 2 &= 0
\end{aligned}$$

Tämä toisen asteen polynomiyhtälö ratkaistiin jo esimerkissä 2.3, jolloin ratkaisuksi saatiin $x = 1$ tai $x = 2$. Näistä juuriehdokkaista vain $x = 1$ toteuttaa murtoyhtälön määrittelyn. Siten yhtälön ratkaisuna on $x = 1$.

Esimerkin murtoyhtälö olisi voitu ratkaista myös siirtämällä kaikki termit samalle puolelle, laventamalla ne samannimisiksi ja käyttämällä tietoa: osamäärä on nolla, kun osoittaja on nolla. **Murtoepäyhtälöiden** ratkaiseminen onnistuu helpoiten tähän tapaan, mutta nyt halutaan tietää osamäärän merkki. Merkkikaavion laatiminen toimii apuna.

Esimerkki 2.8. Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} < 1$$

Ratkaisu: Epäyhtälö on määritelty, kun $x - 1 \neq 0$ ja $x + 1 \neq 0$, eli kun $x \neq \pm 1$. Siirretään kaikki termit samalle puolelle ja lavennetaan ne samannimisiksi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} &< 1 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 &< 0 \\ \frac{x+1-(x-1)-(x^2-1)}{x^2-1} &< 0 \\ \frac{x+1-x+1-x^2+1}{x^2-1} &< 0 \\ \frac{-x^2+3}{x^2-1} &< 0 \end{aligned}$$

Nyt, jos osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkisiä, on osamäärä positiivinen. Jos taas osoittaja ja nimittäjä ovat erimerkkiset, on osamäärä negatiivinen. Selvitetään osoittajan ja nimittäjän merkit eri reaalilukujen x arvoilla. Tämä onnistuu ratkaisemalla molempien nollakohdat ja katsomalla merkit kuvan avulla (vrt. esimerkki 2.4)

Osoittajan nollakohdat: $-x^2 + 3 = 0$, eli $x = \pm\sqrt{3}$. KUVA PUUTTUU

Nimittäjän nollakohdat: $x^2 - 1 = 0$, eli $x = \pm 1$ KUVA PUUTTUU

Merkkikaavio:

$-x^2+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
x^2-1	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
osamäärä	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

$-\sqrt{3}$ $\quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{3}$

Näin ollen epäyhtälön ratkaisuna on $x < -\sqrt{3}$ tai $-1 < x < 1$ tai $x > \sqrt{3}$.

2.6 Itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö

Reaaliluvun $a \in \mathbb{R}$ **itseisarvo**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

Luvun a itseisarvo ilmoittaa lukusuoralla luvun a etäisyyden nollasta. kuva puuttuu

Esimerkki 2.9.

a) $|2| = 2$ b) $|-5| = 5$ c) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

d) $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$

Esimerkki 2.10. Esitä lauseke $|-4x-8|$ ilman itseisarvomerkkejä.

Ratkaisu: Itseisarvon määritelmän perusteella

$$|-4x-8| = \begin{cases} -4x-8, & \text{kun } -4x-8 \geq 0 \\ -(-4x-8), & \text{kun } -4x-8 < 0. \end{cases}$$

Koska $-4x-8 \geq 0$, kun $x \leq -2$ ja $-4x-8 < 0$, kun $x > -2$, saadaan

$$|-4x-8| = \begin{cases} -4x-8, & \text{kun } x \leq -2 \\ 4x+8, & \text{kun } x > -2. \end{cases}$$

Itseisarvon ominaisuuksia:

$$\begin{aligned} |a| &\geq 0 \\ |\text{-}a| &= |a| \\ |ab| &= |a||b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0 \\ |a|^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Itseisarvoyhtälöä tai **-epäyhtälöä** ratkaistaessa pyritään ensin poistamaan itseisarvomerkit. Tämä voidaan tehdä aina itseisarvon määritelmän perusteella, jolloin tarkastelu jaetaan osiin itseisarvolausekkeiden nollakohtien perusteella.

Esimerkki 2.11. Ratkaise yhtälö

$$|x-1| = 2x+4$$

Ratkaisu: Itseisarvon määritelmän perusteella

$$\begin{aligned} |x-1| &= \begin{cases} x-1, & \text{kun } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{kun } x-1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{kun } x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

Kun $x \geq 1$, alkuperäinen yhtälö tulee muotoon:

$$\begin{aligned} x-1 &= 2x+4 \\ -x &= 5 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Tämä ei kuitenkaan kelpaa itseisarvoyhtälön ratkaisuksi, sillä se ei ole tarkasteluvälillä $x \geq 1$.

Kun $x < 1$:

$$\begin{aligned} -x + 1 &= 2x + 4 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1, \end{aligned}$$

joka kelpaa ratkaisuksi, koska se on tarkasteluvälillä $x < 1$.

Siten itseisarvoyhtälön ratkaisuna on $x = -1$.

Itseisarvon määritelmään perustuva ratkaisutapa sopii mihin tahansa itseisarvoyhtälöön tai -epäyhtälöön. Tietyissä erikoistapauksissa itseisarvomerkit voidaan poistaa yhtälöstä tai epäyhtälöstä myös suoraviivaisemmin:

$$\begin{aligned} &|a| = b, \text{ täsmälleen silloin, kun } a = \pm b,\ b \geq 0 \\ &|a| \leq b, \text{ täsmälleen silloin, kun } -b \leq a \leq b \\ &|a| \geq b, \text{ täsmälleen silloin, kun } a \leq -b \text{ tai } a \geq b \\ &|a| = |b|, \text{ täsmälleen silloin, kun } a = \pm b \\ &|a| \leq |b|, \text{ täsmälleen silloin, kun } a^2 \leq b^2 \end{aligned}$$

Huomaa, että epäyhtälöissä ei tarvitse olla yhtäsuuruuksia mukana.

Esimerkki 2.12. Ratkaise itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt

a) $|x - 2| = -3$ b) $|4x^2 + 5| = 6$

c) $|2 - x| = |-4 + 3x|$ d) $|4x + 3| \geq |-2x - 1|$

Ratkaisu:

a) Yhtälö $|x - 2| = -3$ ei toteudu yhdelläkään muuttujan x arvolla, eli sillä ei ole ratkaisua. Itseisarvo ei voi olla negatiivinen.

b) $|4x^2 + 5| = 6$, täsmälleen silloin, kun $4x^2 + 5 = 6$ tai $4x^2 + 5 = -6$, eli kun $x^2 = \frac{1}{4}$ tai $x^2 = -\frac{11}{4}$. Näistä jälkimmäisellä ei ole ratkaisua, koska $x^2 \geq 0$ aina. Ensimmäisestä saadaan itseisarvoyhtälön ratkaisuksi $x = \pm\frac{1}{2}$.

c) $|2 - x| = |-4 + 3x|$, täsmälleen silloin, kun $2 - x = -4 + 3x$ tai $2 - x = -(-4 + 3x)$, eli kun $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ tai $x = 1$. Huomaa, että c)-kohdan itseisarvoyhtälön voi ratkaista myös korottamalla sen puolittain neliöön ja ratkaisemalla saadun toisen asteen yhtälön.

d) $|4x+3| \geq |-2x-1|$. Korotetaan epäyhtälö puolittain neliöön. Koska molemmat puolet ovat ei-negatiiviset, suuruusjärjestys säilyy. Saadaan

$$\begin{aligned}
|4x+3|^2 &\geq |-2x-1|^2 \\
(4x+3)^2 &\geq (-2x-1)^2 \\
16x^2+24x+9 &\geq 4x^2+4x+1 \\
12x^2+20x+8 &\geq 0
\end{aligned}$$

Ratkaistaan saatu toisen asteen epäyhtälö laskemalla paraabelin nollakohdat ja katsomalla kuvan avulla välit, joissa se on suurempaa tai yhtäsuurta kuin nolla. Ratkaisuna saadaan alkuperäisen itseisarvoepäyhtälön ratkaisu. (Harjoitustehtävä.)