2.7 Neliöjuuriyhtälö ja -epäyhtälö

Neliöjuuren määritelmä palautettiin mieleen jo luvun 2.2 alussa. Neliöjuurella on mm. seuraavat ominaisuudet.

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a \geq 0,\ b \geq 0\\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0,\ b > 0\\ \sqrt{a^2} &= |a|\\ \sqrt{a} &> \sqrt{b}, \quad a > b \geq 0\end{aligned}$$

Esimerkki 2.13. Sievennä lauseke

$$\frac{\sqrt{(a-1)^3}}{\sqrt{a-1}}$$

Ratkaisu: Lauseke on määritelty, kun $a > 1$, sillä juurrettavien pitää olla ei-negatiivisia ja nimittäjän erisuuri kuin nolla.

$$\frac{\sqrt{(a-1)^3}}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{\frac{(a-1)^3}{a-1}} = \sqrt{(a-1)^2} = |a-1| = a-1,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa määrittelyehdosta $a > 1$, jolloin $a - 1 > 0$.

Neliöjuuriyhtälön tai **-epäyhtälön** ratkaiseminen perustuu neliöjuuren määritelmään. Se ratkaistaan yleensä siirtämällä ensin termit niin, että juurilauseke jää yksin omalle puolelleen ja korottamalla sitten yhtälö tai epäyhtälö puolittain neliöön.

Esimerkki 2.14. Ratkaise yhtälö

$$x - \sqrt{43-3x} = 11$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}x - \sqrt{43-3x} &= 11\\ \sqrt{43-3x} &= x - 11\end{aligned}$$

Juurilauseke on määritelty, kun $43 - 3x \geq 0$, eli kun $x \leq 14\frac{1}{3}$. Koska neliöjuuren arvo on aina positiivinen tai nolla, on lisäksi oltava $x - 11 \geq 0$, eli $x \geq 11$. Yhdistämällä ehdot saadaan $11 \leq x \leq 14\frac{1}{3}$, jolloin myös yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiiviset ja se voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{43-3x}}_{\geq 0} &= \underbrace{x-11}_{\geq 0} \\
43-3x &= (x-11)^2 \\
43-3x &= x^2-22x+121 \\
x^2-19x+78 &= 0 \\
x &= \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2-4\cdot 1\cdot 78}}{2\cdot 1} \\
x &= \frac{19 \pm 7}{2},
\end{aligned}
$$

eli $x = 6$ tai $x = 13$. Näistä ehdon $11 \leq x \leq 14\frac{1}{3}$ toteuttaa vain $x = 13$. Siten yhtälön ratkaisuna on $x = 13$.

Esimerkki 2.15. Ratkaise epäyhtälö

$$\sqrt{x^2+1} > x-2$$

Ratkaisu: Juurilauseke on määritelty, kun $x \in \mathbb{R}$, koska $x^2+1 > 0$.

Kun epäyhtälön oikea puoli on negatiivinen: $x-2 < 0$, eli kun $x < 2$, on epäyhtälö tosi, koska sen vasemman puolen neliöjuuren arvo on aina vähintään nolla. Siis epäyhtälö toteutuu arvoilla $x < 2$.

Kun $x-2 \geq 0$, eli kun $x \geq 2$ ovat epäyhtälön molemmat puolet ei-negatiiviset, jolloin suuruusjärjestys säilyy korotettaessa epäyhtälö puolittain neliöön.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\geq 0} &> \underbrace{x-2}_{\geq 0} \\
x^2+1 &> (x-2)^2 \\
x^2+1 &> x^2-4x+4 \\
4x &> 3 \\
x &> \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Koska tarkasteluvälinä on $x \geq 2$ ($> 3/4$), toteutuu epäyhtälö koko tarkasteluvälillä, eli arvoilla $x \geq 2$. Yhdistämällä tämä ensimmäiseen tarkasteluun saadaan, että epäyhtälö toteutuu kaikilla $x \in \mathbb{R}$, eli sen ratkaisuna on kaikki reaaliluvut x.

3 Analyyttistä geometriaa

3.1 Suora

Suoran suunnan (kaltevuuden, jyrkkyyden) ilmoittaa sen **kulmakerroin**

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

kuva puuttuu

Jos $k > 0$, suora on nouseva.
Jos $k < 0$, suora on laskeva.
Jos $k = 0$, suora on vaakasuora.
(pystysuora suora: ei kulmakerrointa)

Suorat ovat **yhdensuuntaiset**, jos niillä on sama kulmakerroin. Kaksi suoraa ovat **kohtisuorassa toisiaan vastaan**, jos niiden kulmakertoimien tulo on -1 (tai toinen suora on pystysuora ja toinen vaakasuora).

kuvia puuttuu

Suoran suunnan ilmoittaa myös sen **suuntakulma** α, joka on suoran ja positiivisen x-akselin välinen suunnattu kulma, $-90° < \alpha \leq 90°$. Suuntakulma on positiivinen, kun suora on nouseva ja negatiivinen, kun suora on laskeva.

kuvia puuttuu

Suoran kulmakertoimen ja suuntakulman välinen yhteys on

$$\tan\alpha = k, \quad \alpha \neq 90°.$$

Jos suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja sen kulmakerroin on k, **suoran yhtälö** on

$$y - y_0 = k\,(x - x_0) \qquad (k = \frac{\Delta y}{\Delta x})$$

(jos suoralla ei ole kulmakerrointa, sen yhtälö on $x = x_0$)

Suoran yhtälö esitetään yleensä **ratkaistussa muodossa**

$$y = kx + b,$$

missä vakio b ilmoittaa suoran ja y-akselin leikkauskohdan.

Esimerkki 3.1. Määritä yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(2,3)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $\frac{1}{2}$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} y-3 &= \frac{1}{2}(x-2) \\ y-3 &= \frac{1}{2}x-1 \\ y &= \frac{1}{2}x+2 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö voidaan esittää myös **yleisessä muodossa**

$$ax+by+c=0,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja ainakin toinen vakioista a ja b on nollasta poikkeava. Edellisen esimerkin suoran yhtälö yleisessä muodossa:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x+2 \\ \frac{1}{2}x-y+2 &= 0 \\ x-2y+4 &= 0 \end{aligned}$$

Huomaa, että jokainen muotoa $ax+by+c=0$, $a \neq 0$ tai $b \neq 0$, oleva yhtälö esittää aina suoraa xy-koordinaatistossa.

3.2 Lineaarinen yhtälö- ja epäyhtälöryhmä

Ensimmäisen asteen **yhtälöpari** muodostuu kahdesta suoran yhtälöstä:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0\,. \end{cases}$$

Sen ratkaisun on toteutettava molemmat parin yhtälöt, mikä tarkoittaa graafisesti sitä, että etsitään suorien leikkauspiste. Ensimmäisen asteen yhtälöparilla voi olla ratkaisuja yksi, ei yhtään tai äärettömän monta.

kuvia puuttuu

Esimerkki 3.2. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 4x + 3y = 8\,. \end{cases}$$

Ratkaisu: **Tapa 1.** (sijoituskeino) Ratkaistaan ensin toinen muuttuja toisen suhteen jommasta kummasta parin yhtälöstä ja sijoitetaan saatu tulos ko. muuttujan paikalle toiseen parin yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ y &= -3x + 6 \end{aligned}$$

Tehdään sijoitus parin toiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} 4x + 3(-3x + 6) &= 8 \\ 4x - 9x + 18 &= 8 \\ -5x &= -10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Kun $x = 2$, niin $y = -3 \cdot 2 + 6 = 0$. Yhtälöparin ratkaisuna on siis $x = 2$, $y = 0$.

Tapa 2. (yhteenlaskukeino) Kerrotaan yhtälöt puolittain luvuilla, joilla toisen muuttujan kertoimiksi saadaan vastaluvut ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x - 3y = -18 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

Lasketaan saadut yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan $-5x + 0 = 10$, eli $x = 2$. Toistetaan menettely muuttujalle x:

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 4y = 24 \\ -12x - 9y = -24 \end{cases}$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $-5y = 0$, eli $y = 0$. Huomaa, että y olisi voitu ratkaista myös sijoittamalla yllä saatu x:n arvo jompaan kumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

Lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on m yhtälöä ja n tuntematonta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{cases}$$

missä $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ja $j = 1, 2, \ldots, n$.

Yhtälöryhmän ratkaisun on toteutettava kaikki ryhmän yhtälöt. Edellä esitellyt yhtälöparin ratkaisumenetelmät toistettuna useaan kertaan soveltuvat myös lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen. Ratkaiseminen alkaa tosin olla työlästä, kun yhtälöitä on paljon. Matriisilaskennan avulla lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen onnistuu kätevästi. Tällä kurssilla ei kuitenkaan käsitellä matriisilaskentaa.

Suora $ax + by + c = 0$, missä $a \neq 0$ tai $b \neq 0$, jakaa tason kahteen osaan, jossa toisessa toteutuu epäyhtälö $ax+by+c < 0$ ja toisessa epäyhtälö $ax+by+c > 0$. **Lineaarinen epäyhtälöryhmä** koostuu useasta edellisen kaltaisesta epäyhtälöstä ja sen ratkaisun muodostavat ne tason pisteet, jotka toteuttavat kaikki ryhmän epäyhtälöt.

Esimerkki 3.3. Määritä ne tason pisteet, jotka toteuttavat epäyhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \\ -2x + 3y + 3 \geq 0\,. \end{cases}$$

Ratkaisu: Ratkaistaan ensin y jokaisesta epäyhtälöstä:

$$\begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$

Ehto $y \leq 2x + 1$ toteutuu suoralla $y = 2x + 1$ ja sen alapuolella. Toinen ehto $y \leq -\frac{1}{2}x + 2$ toteutuu suoralla $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ja sen alapuolella. Viimeinen ehto $y \geq \frac{2}{3}x - 1$ toteutuu suoralla $y = \frac{2}{3}x - 1$ ja sen yläpuolella. Epäyhtälöryhmän ratkaisujoukon muodostavat ne tason pisteet, jotka toteuttavat kaikki kolme ehtoa:

KUVA PUUTTUU

3.3 Lineaarinen optimointi

Ongelmaa, jossa etsitään lausekkeen suurinta tai pienintä arvoa tiettyjen rajoitusten ollessa voimassa, sanotaan **optimointitehtäväksi**. Tarkastellaan kahden muuttujan **lineaarista optimointitehtävää**, jossa optimoitava lauseke on lineaarinen ja rajoitukset ensimmäisen asteen epäyhtälöitä.

Esimerkki 3.4. Määritä lausekkeen $2x + y$ suurin arvo alueessa

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x + 3y - 12 \leq 0 \end{cases}$$

Ratkaisu: Esitetään ensin tasossa alue, jonka pisteet toteuttavat epäyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x + 3y - 12 \leq 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \leq -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$$

Ratkaisujoukon selvittäminen tehdään samaan tapaan kuin esimerkissä 3.3.

KUVA PUUTTUU

Merkitään lausekkeen $2x + y$ arvoa kirjaimella c, jolloin saadaan suora $2x + y = c$, ja selvitetään, missä alueen pisteessä c saa suurimman arvonsa.

Suoran $2x + y = c$ yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = -2x + c$. Siten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$ ja c saa suurimman arvonsa, kun leikkauspiste on mahdollisimman korkealla y-akselilla. Yhdensuuntaisten suorien $y = -2x + c$ kulmakerroin on -2. Kuvan avulla havaitaan, että c saa suurimman arvonsa, kun suora $y = -2x + c$ kulkee pisteen A kautta.

KUVA PUUTTUU

Piste A saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y - 12 = 0\,, \end{cases}$$

jonka ratkaisuna on $y = 0$ ja $x = 6$. Siten piste A on $(6, 0)$ ja lausekkeen $2x + y$ suurin arvo on $2 \cdot 6 + 0 = 12$.

Huomautus 3.5. Voidaan osoittaa, että rajoitetussa monikulmiossa, jonka kärkipisteet kuuluvat ratkaisualueeseen, annetun lineaarisen lausekkeen suurin tai pienin arvo saadaan jossakin kärkipisteessä.

3.4 Ympyrä

Ympyrä on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä. Ympyrän yhtälö **keskipistemuodossa** on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

missä r on ympyrän säde ja (x_0, y_0) keskipiste. Suorittamalla potenssiinkorotukset ympyrän yhtälö saadaan ns. **yleiseen muotoon**. Huomaa, että origokeskisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$.

Esimerkki 3.6. Tarkastellaan ympyrää $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$. Sen keskipiste on $(2, -3)$ ja säde $\sqrt{10}$. Ympyrän yhtälö yleisessä muodossa on

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 10 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= 10 \\ x^2 - 4x + y^2 + 6y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Kun suoralla ja ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä, sanotaan suoran olevan ympyrän **sekantti**. Jos suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste, suora on ympyrän **tangentti**.