4 Reaalifunktiot

4.1 Funktion monotonisuus

Olkoon funktion f määrittelyjoukkona reaalilukuväli (erityistapauksena $\mathbb{R}$). Jos **kaikilla** määrittelyjoukon luvuilla x_1 ja x_2 on voimassa ehto:

"jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \leq f(x_2)$",
funktio on **kasvava**
(eli muuttujan x arvojen kasvaessa myös funktion arvot kasvavat)

"jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$",
funktio on **aidosti kasvava**

"jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \geq f(x_2)$",
funktio on **vähenevä**
(eli muuttujan x arvojen kasvaessa funktion arvot sen sijaan vähenevät)

"jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$",
funktio on **aidosti vähenevä**

kuvia puuttuu

Funktio on **monotoninen**, jos se on koko määrittelyjoukossaan pelkästään kasvava tai vähenevä. Funktio on **aidosti monotoninen**, jos se on koko määrittelyjoukossaan pelkästään aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Huomautus 4.1. Aidosti monotoninen funktio saa kunkin kunkin arvonsa vain kerran, eli

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ täsmälleen silloin, kun } x_1 = x_2$$

4.2 Yhdistetty funktio ja käänteisfunktio

Esimerkki 4.2. Olkoon $f(x) = x^2 + x$ ja $g(x) = 2x - 1$. Muodosta funktiot
a) $f(g(x))$ ja b) $g(f(x))$.

Ratkaisu: a) Sijoitetaan funktion f lausekkeeseen muuttujan x paikalle funktion g lauseke.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(2x-1) = (2x-1)^2 + (2x-1) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 = 4x^2 - 2x \end{aligned}$$

b) Sijoitetaan funktion g lausekkeeseen muuttujan x paikalle funktion f lauseke.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2 + x) = 2(x^2 + x) - 1 \\ &= 2x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Olkoot A, B, $C \subset \mathbb{R}$ reaalilukujen osajoukkoja. Funktioiden $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ **yhdistetty funktio**

$$g \circ f = g\,(f(x))$$

on joukossa A määritelty funktio, jonka lauseke saadaan sijoittamalla funktion g lausekkeeseen muuttujan paikalle funktion f lauseke. Yhdistetyssä funktiossa $g\,(f(x))$ funktio f on **sisäfunktio** ja funktio g **ulkofunktio**.

Myöhemmin, kun derivoidaan ja integroidaan on usein osattava tulkita funktio sopivana yhdistettynä funktiona.

Esimerkki 4.3. Tulkitse seuraavat funktiot yhdistettyinä funktioina.

a) $h(x) = (x^3 + 3x - 2)^3$ b) $i(x) = \sqrt{2x^4 + 5}$

c) $j(x) = \dfrac{1}{(5x^2 + 1)^4}$ d) $k(x) = \sin(2x - 3)$

e) $l(x) = 2^{x^2+3}$ f) $m(x) = 2^{\sqrt{x^2+3}}$

Ratkaisu: a) $h(x) = (x^3 + 3x - 2)^3 = g(f(x))$, missä sisäfunktiona on $f(x) = x^3 + 3x - 2$ ja ulkofunktiona $g(x) = x^3$.

b) $i(x) = \sqrt{2x^4 + 5} = g(f(x))$, missä $f(x) = 2x^4 + 5$ ja $g(x) = \sqrt{x}$.

c) $j(x) = \dfrac{1}{(5x^2 + 1)^4} = (5x^2 + 1)^{-4} = g(f(x))$, missä $f(x) = 5x^2 + 1$ ja $g(x) = x^{-4}$.

d) $k(x) = \sin(2x - 3) = g(f(x))$, missä $f(x) = 2x - 3$ ja $g(x) = \sin x$.

e) $l(x) = 2^{x^2+3} = g(f(x))$, missä $f(x) = x^2 + 3$ ja $g(x) = 2^x$.

f) $m(x) = 2^{\sqrt{x^2+3}} = g(f(x))$, missä $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ja $g(x) = 2^x$. Huomaa, että yhdistetyn funktion $g(f(x))$ sisäfunktio f voidaan edelleen tulkita yhdistettynä funktiona $v(u(x))$, missä $u(x) = x^2 + 3$ ja $v(x) = \sqrt{x}$.

Huomautus 4.4. Edellisen esimerkin funktiot voidaan tulkita yhdistetyiksi funktioiksi eri tavoin. Derivoinnin ja integroinnin kannalta sopiva tulkinta on yleensä myös ilmeisin.

Olkoot A, $B \subset \mathbb{R}$ reaalilukujen osajoukkoja. Funktiot $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to A$ ovat toistensa **käänteisfunktioita**, jos kaikilla $x \in A$ on $g(f(x)) = x$ ja kaikilla $y \in B$ on $f(g(y)) = y$.

kuvia puuttuu

Funktiota g sanotaan funktion f käänteisfunktioksi ja sille käytetään merkintää f^{-1}. (Tämä on vain merkintätapa, eikä se liity mitenkään potenssilaskuihin.) Huomaa, että samalla myös f on funktion g käänteisfunktio. Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on sama kuin funktion f arvojoukko, eli $\mathcal{M}_{f^{-1}} = \mathcal{A}_f$. Vastaavasti käänteisfunktion f^{-1} arvojoukko on sama kuin funktion f määrittelyjoukko, eli $\mathcal{A}_{f^{-1}} = \mathcal{M}_f$.

kuva puuttuu

Käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja saadaan peilaamalla funktion f kuvaaja suoran $y = x$ suhteen.

kuva puuttuu

Annetaan esimerkki funktiosta, jolla ei ole käänteisfunktiota.

Esimerkki 4.5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to [1, \infty)$; $f(x) = x^2 + 1$. Funktio f kuvaa luvun 2 luvuksi 5, jolloin käänteisfunktion olisi kuvattava luku 5 luvuksi 2. Funktio f kuvaa myös luvun -2 luvuksi 5, jolloin käänteisfunktion olisi kuvattava luku 5 myös luvuksi -2. Tämä on ristiriidassa luvussa 1.6 annetun funktion määritelmän kanssa: "Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion." Toisin sanoen sama luku ei voi kuvautua kahdeksi eri luvuksi, joten funktiolla f ei voi olla käänteisfunktiota $f^{-1}\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$.

Huomautus 4.6. Jos funktio $f\colon \mathcal{M}_f \to \mathcal{A}_f$ on aidosti monotoninen, sillä on olemassa käänteisfunktio.

Edellisen esimerkin funktiolla on maalijoukkona sen arvojoukko $[1, \infty)$. Rajoitetaan funktion määrittelyjoukkoa, jolloin siitä tulee aidosti monotoninen.

Esimerkki 4.7. Olkoon funktio $f\colon [0, \infty) \to [1, \infty)$; $f(x) = x^2 + 1$. Määritä funktion käänteisfunktio f^{-1}.

Ratkaisu: Funktiolla $f\colon \mathcal{M}_f \to \mathcal{A}_f$ on olemassa käänteisfunktio, koska se on aidosti kasvava koko määrittelyjoukossaan $[0, \infty)$ (eli f on aidosti monotoninen). Määritetään käänteisfunktion lauseke:

Ratkaistaan yhtälö $y = x^2 + 1$ muuttujan x suhteen.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ x^2 &= y - 1 \\ x &= \pm\sqrt{y - 1} \end{aligned}$$

Koska $x \in [0, \infty)$, antaa positiivinen ratkaisu käänteisfunktion lausekkeen. Funktion f käänteisfunktio on siis $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$. Sen määrittelyjoukkona on funktion f arvojoukko $[1, \infty)$ ja arvojoukkona funktion f määrittelyjoukko $[0, \infty)$.

Merkitään vielä käänteisfunktion muuttujaa kirjaimella x, jolloin saadaan $f^{-1}\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

4.3 Potenssi- ja juurifunktio

Parillinen potenssifunktio on muotoa $f(x) = x^n$, missä eksponentti $n = 2, 4, 6, \ldots$ Sen määrittelyjoukkona on reaalilukujen joukko: $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$ ja arvojoukkona ei-negatiiviset reaaliluvut: $\mathcal{A}_f = [0, \infty)$.

kuva puuttuu

Pariton potenssifunktio on muotoa $f(x) = x^n$, missä eksponentti $n = 1, 3, 5, \ldots$ Sen määrittelyjoukkona ja arvojoukkona on reaalilukujen joukko: $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$ ja $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$. Pariton potenssifunktio on aidosti kasvava ja se saa kunkin arvonsa täsmälleen kerran.

kuva puuttuu

Kun n on parillinen (erityistapauksena $n = 2$, eli neliöjuuri), on yhtälöllä $x^n = a$, $a > 0$, kaksi ratkaisua: $x = \pm\sqrt[n]{a}$. (Jos $a = 0$, yhtälöllä on yksi ratkaisu: $x = 0$ ja jos $a < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.)

Kun n on pariton, yhtälöllä on aina täsmälleen yksi ratkaisu, joka on luvun a n:s juuri $x = \sqrt[n]{a}$.

Esimerkki 4.8. a) $\sqrt[3]{-27} = -3$, koska $(-3)^3 = -27$ b) $\sqrt[4]{16} = 2$, koska $2^4 = 16$

c) $\sqrt[5]{100000} = 10$, koska $10^5 = 100000$ d) $\sqrt[6]{-112}$ ei ole määritelty

Yleisille juurille on voimassa vastaavat laskusäännöt kuin neliöjuurillekin (luvun 2.7 alussa). Huomaa kuitenkin, että

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{kun } n \text{ pariton} \\ |a|, & \text{kun } n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Juurifunktio $f(x) = \sqrt[n]{x}$ on potenssifunktion käänteisfunktio. Kun n on parillinen, juurifunktion määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = [0, \infty)$ ja arvojoukko $\mathcal{A}_f = [0, \infty)$. Kun n on pariton, juurifunktion määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$ ja arvojoukko $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$.

Juurifunktioiden kuvaajat voidaan hahmotella potenssifunktioiden kuvaajien avulla, koska käänteisfunktioina niiden kuvaajat ovat symmetriset suoran $y = x$ suhteen. Huomaa, että tapauksessa n on parillinen, jotta juurifunktio ja potenssifunktio ovat toistensa käänteisfunktiot, on potenssifunktion määrittelyjoukko rajoitettava välille $[0, \infty)$.

kuvia puuttuu

Juurifunktio on aidosti kasvava molemmissa tapauksissa: n parillinen tai n pariton.

Luvussa 1.2 tarkasteltiin potenssimerkintää ja potenssin laskusääntöjä eksponentin ollessa luonnollinen luku, eli positiivinen kokonaisluku. Lisäksi määriteltiin tapaukset, joissa eksponenttina on nolla tai negatiivinen kokonaisluku:

$$a^0 = 1, \text{ missä } a \neq 0$$

ja

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ missä } a \neq 0$$

Tarkastellaan seuraavaksi **murtopotenssia**, jolloin eksponenttina on rationaaliluku.

Kun kantaluku $a > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, on

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Erityisesti $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0.$

Huomautus 4.9.

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

Esimerkki 4.10.

$$\text{a) } 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{b) } 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

Eksponenttina voi myös olla irrationaaliluku. Silloinkin kantaluvun on oltava positiivinen. Irrationaalipotenssien likiarvoja voidaan laskea laskimella. Edellä määritellyille potensseille on voimassa vastaavat laskusäännöt kuin mitä luvussa 1.2, jolloin eksponenttina oli luonnollinen luku.

Määritellään nyt **yleinen potenssifunktio**, joka on muotoa

$$f(x) = x^r,$$

missä eksponentti $r \in \mathbb{R}$ on jokin reaaliluku.
Määrittelyjoukkona on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, jos r on luonnollinen luku eli positiivinen kokonaisluku.
Jos r on nolla tai negatiivinen kokonaisluku, määrittelyjoukkona on reaalilukujen joukko paitsi nolla.
Jos r on rationaali- tai irrationaaliluku, määrittelyjoukkona on väli $(0, \infty)$.

4.4 Eksponentti- ja logaritmifunktio

Eksponenttifunktio on muotoa

$$f(x) = a^x,$$

missä kantaluku $a > 0$ ja funktion muuttuja on eksponentissa. Eksponenttifunktion määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$ ja arvojoukko $\mathcal{A}_f = (0, \infty)$.

kuvia puuttuu

Eksponenttifunktio on aidosti kasvava, jos kantaluku $a > 1$. Jos $0 < a < 1$, eksponenttifunktio on aidosti vähenevä. Jos $a = 1$, niin $f(x) = a^x = 1^x = 1$ kaikilla muuttujan x arvoilla, eli kyseessä on vakiofunktio.

Derivoinnin kannalta tärkein eksponenttifunktio on e^x, missä kantaluku e on ns. **Neperin luku**. Se on irrationaaliluku, jonka likiarvo on $2{,}71828$.

Luvun $b > 0$ a-**kantainen logaritmi** ($a > 0$ ja $a \neq 1$), jota merkitään $\log_a b$, on eksponentti x, joka toteuttaa yhtälön $a^x = b$. Logaritmi $\log_a b$ on määritelty vain positiivisilla luvuilla b, koska eksponenttifunktio saa pelkästään positiivisia arvoja.

Esimerkki 4.11. a) $\log_4 16 = 2$, koska $4^2 = 16$ b) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, koska $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Logaritmin määritelmän perusteella sille on voimassa seuraavat laskusäännöt ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\log_a a^p &= p \\
\log_a 1 &= 0, \ \text{koska} \ a^0 = 1 \\
\log_a a &= 1, \ \text{koska} \ a^1 = a \\
a^{\log_a x} &= x \quad (x > 0)
\end{aligned}$$

Lisäksi potenssien laskusääntöjen avulla voidaan johtaa: ($x > 0$, $y > 0$ ja $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^p &= p \log_a x
\end{aligned}$$

Laskimet sisältävät yleensä vain 10- ja e- kantaiset logaritmifunktiot. Näistä 10-kantaista logaritmia merkitään $\log_{10} x = \lg x$ (vaikka laskimissa jostain kumman syystä: log). **Luonnollista logaritmia**, jossa kantalukuna on Neperin luku e, merkitään $\log_e x = \ln x$.

Mikä tahansa a- kantainen logaritmi voidaan ilmoittaa kantalukua vaihtamalla 10- kantaisten tai luonnollisten logaritmien avulla, jolloin sen likiarvo saadaan laskimella:

$$\log_a x = \frac{\log_k x}{\log_k a},$$

missä $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ ja $k > 0$, $k \neq 1$.

Esimerkki 4.12. a) $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \cdot \ln e = -1$ b) $\lg 50 + \lg 2 = \lg(50 \cdot 2) = \lg 100 = \lg 10^2 = 2$

Koska logaritmi $\log_a y$ on se muuttujan x arvo, jolla eksponenttifunktio a^x saa arvon y, on logaritmifunktio eksponenttifunktion käänteisfunktio. Siten logaritmifunktion määrittelyjoukko on eksponenttifunktion arvojoukko $(0, \infty)$ ja sen arvojoukko on eksponenttifunktion määrittelyjoukko $\mathbb{R}$. Funktioiden kuvaajat ovat symmetriset suoran $y = x$ suhteen.

kuvia puuttuu

Logaritmifunktio on aidosti monotoninen, joten se saa kunkin arvonsa täsmälleen kerran. Jos $a > 1$, logaritmifunktio on aidosti kasvava. Jos $0 < a < 1$, logaritmifunktio on aidosti vähenevä. Huomaa, että erityisesti $\lg x$ ja $\ln x$ ovat aidosti kasvavia.

Esimerkki 4.13. Ratkaise yhtälö

$$4^x = 8^{x-1}$$

Ratkaisu: **Tapa 1.**

$$\begin{aligned}
4^x &= 8^{x-1} \\
\left(2^2\right)^x &= \left(2^3\right)^{x-1} \\
2^{2x} &= 2^{3(x-1)} \\
2x &= 3(x-1) \\
2x &= 3x - 3 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Tapa 2.

$$\begin{aligned}
4^x &= 8^{x-1} \\
\ln 4^x &= \ln 8^{x-1} \\
x \ln 4 &= (x-1)\ln 8 \\
x \ln 4 &= x \ln 8 - \ln 8 \\
x \ln 8 - x \ln 4 &= \ln 8 \\
x(\ln 8 - \ln 4) &= \ln 8 \\
x \ln 2 &= \ln 8 \\
x &= \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.14. Ratkaise yhtälö

$$2^x = 3$$

Ratkaisu: **Tapa 1.**

Logaritmin määritelmän mukaan $2^x = 3$ täsmälleen silloin, kun $x = \log_2 3$. Tekemällä kantaluvun vaihto saadaan, että

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849\ldots \approx 1,58$$

Tapa 2.

$$\begin{aligned}
2^x &= 3 \\
\ln 2^x &= \ln 3 \\
x \ln 2 &= \ln 3 \\
x &= \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849\ldots \approx 1,58
\end{aligned}$$

4.5 Trigonometriset funktiot

Terävän kulman $\alpha \in (0, 90°)$ trigonometriset funktiot määritellään suorakulmaisen kolmion sivujen suhteina (kuva kolmiosta puuttuu):

$\sin\alpha = \dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
$\cos\alpha = \dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
$\tan\alpha = \dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$	$\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$

Muistikolmioiden avulla osataan laskea trigonometristen funktioiden tarkat arvot joillekin kulmille α. Kaikille kulmille saadaan laskimella trigonometristen funktioiden likiarvot. Jos suorakulmaisessa kolmiossa kahden sivun suhde tiedetään, saadaan kulmat laskimella trigonometristen funktioiden käänteisfunktioiden avulla.

Esimerkki 4.15. a) $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\tan\alpha = 14$, jolloin $\alpha \approx 85,9^\circ$

Esimerkki 4.16. Puun varjon pituus on 9, 3 metriä, kun aurinko paistaa 39° asteen kulmassa. Laske puun korkeus.

Ratkaisu:

$$\tan 39^\circ = \frac{x}{9,3},$$

josta saadaan puun korkeudeksi: $x = 9,3 \cdot \tan 39^\circ \approx 7,5$ metriä.

Kulman suuruus voidaan ilmoittaa myös käyttäen ns. absoluuttista kulmanyksikköä eli **radiaania**. Kulman suuruus radiaaneina on kaaren pituuden ja säteen suhde.

$$\alpha = \frac{b}{r}$$ kuva puuttuu

Näin ollen asteiden ja radiaanien välillä on vastaavuus $180^\circ = \pi$ (rad), josta saadaan $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (rad), mikä ilmoittaa yhden asteen radiaaneina. Toisaalta 1 (rad) $= \frac{180^\circ}{\pi}$, mikä puolestaan ilmoittaa yhden radiaanin asteina.

Esimerkki 4.17. a) $60^\circ = 60 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} = \dfrac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$

Yleistetään seuraavaksi trigonometristen funktioiden määritelmät koskemaan kaikkia kulmia. Terävien kulmien tapauksessa määritelmät yhtyvät suorakulmaisen kolmion sivujen suhteisiin perustuviin määritelmiin.

Olkoon (x, y) yksikköympyrään (keskipiste $(0, 0)$ ja säde 1) piirrettyä suunnattua kulmaa α (alkukylkenä positiivinen x- akseli) vastaava kehäpiste, eli loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspiste.

Kulman α **sini** on kulman kehäpisteen y- koordinaatti eli $\sin\alpha = y$.

Kulman α **kosini** on kulman kehäpisteen x- koordinaatti eli $\cos\alpha = x$.

Kulman α **tangentti** on kulman sinin ja kosinin osamäärä eli $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, missä $\cos\alpha \neq 0$.

kuvia puuttuu

Seuraavassa taulukossa on määritelmien perusteella katsottu yksikköympyrästä joidenkin kulmien trigonometristen funktioiden tarkat arvot.

α	Kulma asteina	Vastaava kehäpiste	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$-\pi$	$-180°$	$(-1, 0)$	0	-1	0
$-\frac{\pi}{2}$	$-90°$	$(0, -1)$	-1	0	ei ole määr.
$-\frac{\pi}{4}$	$-45°$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
0	$0°$	$(1, 0)$	0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	$(0, 1)$	1	0	ei ole määr.
π	$180°$	$(-1, 0)$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	$(0, -1)$	-1	0	ei ole määr.
2π	$360°$	$(1, 0)$	0	1	0
3π	$540°$	$(-1, 0)$	0	-1	0

Esimerkiksi taulukkokirjassa on lisää trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja. Likiarvot saadaan laskimella. Kun laskimella määritetään radiaaneina ilmaistun kulman sinin, kosinin tai tangentin arvoa, on muistettava asettaa laskin radiaanitilaan.

Huomautus 4.18. Merkitään kulmaa α kirjaimella x ja käytetään kulman yksikkönä radiaania. Tällöin yksikköympyrään perustuvat määritelmät antavat kaikilla reaaliluvuilla määritellyt ($\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$ ja $\mathcal{M}_g = \mathbb{R}$) sini- ja kosinifunktiot:

$$f(x) = \sin x \quad \text{ja} \quad g(x) = \cos x$$

joiden arvojoukkona on väli $[-1, 1]$ ($\mathcal{A}_f = [-1, 1]$ ja $\mathcal{A}_g = [-1, 1]$). Muun muassa tästä on kurssin kotisivulla asiaa hyvin havainnollistava GeoGebra-esitys. Huomaa, että muuttuja x, eli kulma radiaaneina on yksinkertaisesti reaaliluku (esimerkiksi $-\pi$ on irrationaaliluku, jonka likiarvo on $-3,14159$). Tangenttifunktio $\tan x = \frac{\sin x}{cos x}$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla paitsi niillä, joilla nimittäjä $\cos x = 0$. Tangenttifunktio on siten määritelty, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Huomaa, että tangenttifunktio voi saada kaikki reaaliarvot, joten sen arvojoukkona on $\mathbb{R}$.

Kun tiedetään mihin yksikköympyrän neljännekseen kulman x loppukylki kuuluu, voidaan sen trigonometristen funktioiden merkit päätellä.

kuvia puuttuu

Yksikköympyrän avulla nähdään myös trigonometristen funktioiden jaksollisuus ja symmetriaominaisuudet:

kuvia puuttuu

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin(x + n \cdot 2\pi),\ n \in \mathbb{Z} \\
\cos x &= \cos(x + n \cdot 2\pi),\ n \in \mathbb{Z} \\
\tan x &= \tan(x + n \cdot \pi),\ n \in \mathbb{Z} \\
\sin(-x) &= -\sin x \\
\cos(-x) &= \cos x \\
\tan(-x) &= -\tan x \\
\sin(\pi - x) &= \sin x \\
\cos(\pi - x) &= -\cos x \\
\tan(\pi - x) &= -\tan x
\end{aligned}
$$

Koska kulmaa x vastaava kehäpiste $(\cos x, \sin x)$ on origokeskisellä yksikköympyrällä, toteuttaa se tämän ympyrän yhtälön: $x^2 + y^2 = 1$. Siten

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1,$$

missä sinin ja kosinin potenssit ilmoitetaan yleensä ilman sulkeita, jolloin merkitään

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Lisäksi hyödyllisiä trigonometrisia kaavoja ovat mm. kaksinkertaisen kulman kaavat sinille ja kosinille:

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}
$$

Trigonometriset yhtälöt:

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$x = \alpha + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = (\pi - \alpha) + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$x = \alpha + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\alpha + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha$$

$$x = \alpha + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Esimerkki 4.19. a) $\sin x = 1$ b) $\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ c) $\sin 5x = 2$

Ratkaisu:

a)

$$\sin x = 1$$
$$\sin x = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi, \quad \text{joten}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi, \quad \text{missä } n \in \mathbb{Z}.$$

b)

$$\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 3x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi, \quad \text{eli}$$
$$x = \frac{\pi}{12} + n\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\pi}{12} + n\cdot\frac{2\pi}{3}, \quad \text{missä } n \in \mathbb{Z}.$$

c) Yhtälöllä $\sin 5x = 2$ ei ole ratkaisua, koska $-1 \le \sin 5x \le 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.