5 Differentiaalilaskentaa

5.1 Raja-arvo

Esimerkki 5.1. Rationaalifunktiota

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa eli, kun $x = 1$. Funktio on kuitenkin määritelty kohdan $x = 1$ läheisyydessä. Tutki, mitä funktion g arvoille tapahtuu, kun muuttuja x lähestyy lukua 1.

Ratkaisu: Lasketaan funktion g arvoja kohdan $x = 1$ molemmin puolin:

x	$0,8$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	1	$1,001$	$1,01$	$1,1$	$1,2$
$g(x)$	$2,8$	$2,9$	$2,99$	$2,999$	ei ole määr.	$3,001$	$3,01$	$3,1$	$3,2$

Taulukon perusteella funktion g arvot näyttäisivät lähestyvän lukua 3, kun muuttuja x lähestyy lukua 1 sekä oikealta, että vasemmalta. Itse asiassa funktion g arvot tulevat miten lähelle tahansa lukua 3, kunhan muuttujan x arvot ovat riittävän lähellä lukua 1.

Edellisen esimerkin funktiolla g on kohdassa $x = 1$ **raja-arvo** 3, merkitään

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 3 .$$

Yleisesti funktiolla f on kohdassa $x = x_0$ raja-arvo a, merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a ,$$

jos funktion arvot $f(x)$ lähestyvät lukua a, kun muuttuja x lähestyy lukua x_0. Raja-arvoa voidaan merkitä myös: $f(x) \to a$, kun $x \to x_0$. Huomaa, että funktion ei tarvitse olla määritelty kohdassa x_0.

Raja-arvon olemassaolo vaatii, että **vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot** ovat yhtä suuret. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $x = x_0$, merkitään

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) ,$$

tarkoittaa sitä, että muuttuja x lähestyy lukusuoralla lukua x_0 sen vasemmalta puolelta. Vastaavasti oikeanpuoleisen raja-arvon tapauksessa, merkitään

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) ,$$

muuttuja x lähestyy lukua x_0 sen oikealta puolelta. Raja-arvon olemassaololle voidaan näin ollen muotoilla ehto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ täsmälleen silloin, kun}$$

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x \to x_0 +} f(x) = a\,.$$

Jos funktion arvot kasvavat rajatta lähestyttäessä sekä vasemmalta että oikealta lukua x_0, on funktiolla kohdassa $x = x_0$ **epäoleellinen raja-arvo** ∞. Vastaavasti, jos arvot vähenevät rajatta, on epäoleellisena raja-arvona $-\infty$. Huomaa, että funktion raja-arvoa voidaan tutkia jonkin kohdan sijaan myös äärettömyydessä, jolloin $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$.

Raja-arvolle on voimassa laskusääntöjä, joita löytyy muun muassa lukion pitkän matematiikan oppikirjoista ja luentomonisteesta Kaija Häkkinen: Matematiikan propedeuttinen kurssi. Myös luennolla jaettu "raja-arvokaavio" auttaa raja-arvojen laskemisessa.

Esimerkki 5.2. Laske raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{x \to 2} (5x^3 + x^2 - x) \quad \text{b) } \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

Ratkaisu:

a) Raja-arvo voidaan laskea suoraan sijoittamalla:

$$\lim_{x \to 2} (5x^3 + x^2 - x) = 5 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 = 42$$

b) Rationaalifunktiota ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x = 1$. Koska myös osoittaja on nolla kohdassa $x = 1$, pyritään supistamaan rationaalilauseketta niin, että voidaan tehdä sijoitus $x = 1$. Jaetaan osoittaja tekijöihin ratkaisemalla osoittajan nollakohdat (polynomin jakaminen tekijöihin nollakohtien avulla käytiin luennolla korkeamman asteen yhtälön yhteydessä).

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1},$$

mistä saadaan nollakohdiksi $x = 1$ ja $x = -2$. Siten

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

c) Jälleen sekä nimittäjä että osoittaja ovat nollia kohdassa, jota lähestytään. Pyritään supistamaan niin, että voidaan tehdä sijoitus. Tällä kertaa lavennetaan funktiota liittolausekkeella, eli erotusta $\sqrt{x} - 2$ vastaavalla summalla $\sqrt{x} + 2$, minkä jälkeen voidaan supistaa ja tehdä sijoitus $x = 4$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{(\sqrt{x})^2-2^2} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(x-4)}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 4
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.3. a) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(=\frac{1}{0^2}\right)=\infty$ b) $\lim_{x\to\infty}3^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3^{2x}}\left(=\frac{1}{3^{2\cdot\infty}}=\frac{1}{\infty}\right)=0$

Esimerkki 5.4. Olkoon

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{kun } x<0 \\ 1, & \text{kun } x\geq 0\,. \end{cases}$$

Tutki raja-arvoa $\lim_{x\to 0}f(x)$.

Ratkaisu: Jos funktiolla f on olemassa raja-arvo $\lim_{x\to 0}f(x)$, on vasemman- ja oikeanpuoleisten raja-arvojen oltava samat. Lasketaan toispuoleiset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}x=0$$

ja

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}1=1$$

Koska $\lim_{x\to 0-}f(x)=0\neq 1=\lim_{x\to 0+}f(x)$, ei funktiolla f ole raja-arvoa kohdassa $x=0$.

5.2 Jatkuvuus

Funktio f on **jatkuva** kohdassa $x=x_0$, jos

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \quad \text{eli, jos}$$

$$\lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)\,.$$

Muutoin funktio f on **epäjatkuva** kohdassa $x=x_0$ ja tällöin kohtaa $x=x_0$ kutsutaan funktion f **epäjatkuvuuskohdaksi**.

Funktion jatkuvuus edellyttää, että funktion arvo ja raja-arvo (oltava olemassa) kohdassa $x=x_0$ ovat yhtä suuret. Funktion jatkuvuudesta kohdassa $x=x_0$ voidaan puhua vain, jos funktio on määritelty kohdassa $x=x_0$.

Määrittelyjoukossaan jatkuvia funktioita ovat

- polynomifunktio $P(x)$

- rationaalifunktio $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, missä P ja Q ovat polynomifunktioita

- juurifunktio $\sqrt[n]{x}$, missä $n = 2, 3, 4, \ldots$

- potenssifunktio x^r, missä $r \in \mathbb{R}$

- eksponenttifunktio $a^x \quad (a > 0)$

- logaritmifunktio $\log_a x \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$

- trigonometriset funktiot $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$

Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia ja c on vakio, niin funktiot cf, $f \pm g$, fg, $|f|$, $\frac{f}{g}$ ja $g \circ f$ ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Esimerkki 5.5. a) Funktio $f(x) = 5x^6 - 4x + 3$ on polynomifunktiona jatkuva.

b) Funktio $f(x) = 1/x$ on rationaalifunktiona jatkuva.

c) Funktio $f(x) = \sin e^x$ on jatkuva, koska se on jatkuvien funktioiden $g(x) = \sin x$ ja $h(x) = e^x$ yhdistetty funktio $g \circ h$.

Huomautus 5.6. Esimerkin 5.5 b)-kohdassa on jatkuva funktio $f(x) = 1/x$, jonka kuvaaja on epäyhtenäinen. Kuitenkin myös funktion määrittelyjoukko "katkeaa" kohdassa $x = 0$. Jos funktion määrittelyjoukko on jokin väli (yhtenäinen), on jatkuvan funktion kuvaaja aina yhtenäinen, katkeamaton käyrä.

Bolzanon lause: Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Jos funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktiolla on avoimella välillä (a, b) ainakin yksi nollakohta.

kuva puuttuu

Huomaa, että välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion f kuvaaja on katkeamaton, eli se ei voi "hypätä x-akselin yli". Bolzanon lauseen avulla voidaan määrittää likiarvoja funktion nollakohdille kaventamalla väliä, jolta nollakohta löytyy, halutulle tarkkuudelle.

Esimerkki 5.7. Yhtälöllä $x^5 + x = 1$ on täsmälleen yksi juuri. Etsi juuren yksidesimaalinen likiarvo.

Ratkaisu: Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^5+x-1 = 0$, jolloin yhtälön ainoa juuri on funktion $f(x) = x^5 + x - 1$ nollakohta. Funktio f on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla, eli koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Sovelletaan Bolzanon lausetta:

x	$f(x)$	nollakohta välillä
0	$-1 < 0$	
1	$1 > 0$	$(0, 1)$
$0,5$	$-$	$(0.5, 1)$
$0,75$	$-$	$(0.75, 1)$
$0,85$	$+$	$(0.75, 0.85)$

Funktion f nollakohdan yksidesimaalinen likiarvo on $0,8$ ja siten yhtälön $x^5 + x = 1$ juuren yksidesimaalinen likiarvo on $x \approx 0,8$.

5.3 Derivaatta

Funktion f **keskimääräistä kasvunopeutta** kohtien x_0 ja x välillä kuvaa **sekantin** (eli funktion kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$ kautta kulkevan suoran) kulmakerroin.

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

kuvia puuttuu

Lyhentämällä tarkasteluväliä, eli antamalla kohdan x lähestyä kohtaa x_0, sekantin kulmakerroin kuvaa paremmin funktion kasvunopeutta kohdassa x_0. Tällöin sekantti lähestyy kohtaan x_0 funktion kuvaajalle piirrettyä **tangenttia** (eli sivuajaa) ja sekantin kulmakerroin k_s lähestyy tangentin kulmakerrointa k_t. Siis

$$k_t = \lim_{x \to x_0} k_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Kurssin kotisivulta löytyy asiaa havainnollistava GeoGebra-esitys.

Lauseketta $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$, sanotaan funktion f **erotusosamääräksi** kohtien x_0 ja x välillä. Erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on funktion f **derivaatta** kohdassa x_0 ja sitä merkitään $f'(x_0)$.