Derivaatta kuvaa funktion **hetkellistä kasvunopeutta**. Geometrisesti tulkittuna funktion derivaatta kohdassa x_0 on funktion kuvaajalle kohtaan x_0 piirretyn tangentin kulmakerroin. Funktio f on **derivoituva** kohdassa x_0, jos erotusosamäärän raja-arvo on olemassa.

Huomautus 5.8. Derivaatan määritelmä voidaan esittää myös muodossa

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Funktion f **derivaattafunktio** f' on funktio, jonka arvo jokaisessa kohdassa on funktion f derivaatta tässä kohdassa (katso GeoGebra-esitys kurssin kotisivulta). Derivaattafunktion muodostamista sanotaan funktion **derivoimiseksi**. Toisinaan käytetään myös merkintöjä Df tai $\frac{df}{dx}$, jossa funktiota f derivoidaan muuttujan x suhteen.

Derivointi määritelmän (erotusosamäärän raja-arvon) perusteella on työlästä. Derivaatan määritelmästä voidaan johtaa derivoimissääntöjä ja jatkossa funktiot derivoidaan näiden sääntöjen avulla. Todistukset säännöille löytyy lukion pitkän matematiikan oppikirjoista.

Derivoimissääntöjä

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia ja $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

1. $Dc = 0$ (vakiofunktion derivaatta)

2. $Dx = 1$

3. $Dx^r = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$ (potenssifunktion derivaatta)

4. $D\,(c \cdot f(x)) = c \cdot f'(x)$ (vakion siirtosääntö)

5. $D\,(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivaatta)

6. $D\,(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (tulon derivaatta)

7. $D\,\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$ (osamäärän derivaatta)

Esimerkki 5.9. Derivoi polynomifunktio $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 5$.

Ratkaisu: $f'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} - 1 + 0 = 8x^3 - 6x - 1$.

Esimerkki 5.10. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ b) $g(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+1}$.

Ratkaisu: a) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$, joten

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}, \; x \neq 0$$

b) Osamäärän derivoimissäännön nojalla

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{D(3x-2)\cdot(x^2+1)-(3x-2)\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3\cdot(x^2+1)-(3x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2+4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Funktioiden f ja g yhdistetyn funktion $g\,(f(x))$ derivaatta on

$$D\,(g\,(f(x))) = g'\,(f(x))\cdot f'(x).$$

Yhdistetyn funktion derivaatta muodostetaan sijoittamalla ulkofunktion g derivaattafunktioon g' muuttujan paikalle sisäfunktion $f(x)$ lauseke. Saatu lauseke kerrotaan vielä sisäfunktion derivaattafunktiolla $f'(x)$.

Esimerkki 5.11. Derivoi funktio $f(x) = (3-4x)^{20}$.

Ratkaisu: $f(x) = g\,(h(x))$, missä $g(x) = x^{20}$ ja $h(x) = 3-4x$. Ulkofunktion derivaattafunktio on $g'(x) = 20x^{19}$ ja sisäfunktion derivaattafunktio on $h'(x) = -4$. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön perusteella

$$f'(x) = g'\,(h(x))\cdot h'(x) = 20\,(3-4x)^{19}\cdot(-4) = -80\,(3-4x)^{19}.$$

Edellisen luvun kaikki alkeisfunktiot ovat määrittelyjoukossaan derivoituvia.

Eksponenttifunktion $f(x) = e^x$, jossa kantalukuna on Neperin luku e, derivaatta on sama kuin funktio itse eli

$$f'(x) = e^x \;\text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$, missä $a > 0$, derivaatta on

$$f'(x) = a^x\cdot\ln a \;\text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 5.12. Derivoi funktio $f(x) = e^{x^3+2x}$.

Ratkaisu: Yhdistetyn funktion derivoimissäännön nojalla

$$f'(x) = e^{x^3+2x}\cdot D(x^3+2x) = (3x^2+2)\cdot e^{x^3+2x}.$$

Luonnollisen logaritmifunktion $f(x) = \ln x$, $x > 0$, derivaatta on

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \ x > 0$$

Esimerkki 5.13. Derivoi funktio $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.

Ratkaisu: Yhdistetyn funktion derivoimissäännön perusteella

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot D(x^2 + 3) = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

Sinifunktion $f(x) = \sin x$ derivaatta on kosinifunktio: $f'(x) = \cos x$. Kosinifunktion $f(x) = \cos x$ derivaatta on $f'(x) = -\sin x$.

Esimerkki 5.14. Derivoi funktio $f(x) = 2x \sin x$.

Ratkaisu: Tulon derivoimissäännön nojalla

$$f'(x) = D(2x) \cdot \sin x + 2x \cdot D(\sin x) = 2 \sin x + 2x \cos x.$$

Esimerkki 5.15. Derivoi funktio $f(x) = e^{\sqrt{2x}}$, $x \geq 0$.

Ratkaisu: Yhdistetyn funktion derivoimissäännön perusteella

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{2x}} \cdot D(\sqrt{2x}) = e^{\sqrt{2x}} \cdot D(2x)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2}(2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot D(2x) \\ &= e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = e^{\sqrt{2x}} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}, \ x > 0 \end{aligned}$$

5.4 Derivaatan sovelluksia

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Derivoituvan funktion monotonisuus voidaan selvittää derivaatan merkin avulla. Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b).

Jos $f'(x) > 0$ koko välillä (yksittäisissä kohdissa voi olla $f'(x) = 0$), niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.

Jos $f'(x) < 0$ koko välillä (yksittäisissä kohdissa voi olla $f'(x) = 0$), niin funktio f on aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Esimerkki 5.16. Tutki funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$ kulkua derivaatan avulla.

Ratkaisu: Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktion f derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$. Tutkitaan funktion f kasvamista ja vähenemistä derivaatan merkkikaavion avulla. Ratkaistaan sitä varten derivaattafunktion nollakohdat:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = -4$ tai $x = 2$. Koska funktion f derivaattafunktio on ylöspäin aukeava paraabeli, laaditaan derivaatan merkkikaavio derivaattafunktion kuvaajan perusteella. Derivaatan merkkikaaviosta saadaan funktion kulkukaavio.

f'	+	−	+
f	aidosti kasvava	aidosti vähenevä	aidosti kasvava

-4 $\qquad\qquad$ 2

Siten funktio f on aidosti kasvava väleillä $(-\infty, -4]$ ja $[2, \infty)$. Funktio f on aidosti vähenevä välillä $[-4, 2]$.

kuva puuttuu

Funktion ääriarvot

Derivaatan nollakohdat, joissa funktio vaihtaa kulkusuuntaansa, ovat **ääriarvokohtia**. Ääriarvokohtia voivat olla myös esimerkiksi kohdat, joissa funktio ei ole jatkuva tai derivoituva.

Funktiolla f on kohdassa x_0 **paikallinen/lokaali minimi(arvo)**, jos $f(x_0)$ on funktion f pienin arvo kohdan x_0 läheisyydessä. Vastaavasti funktiolla f on kohdassa x_0 **paikallinen/lokaali maksimi(arvo)**, jos $f(x_0)$ on funktion f suurin arvo kohdan x_0 läheisyydessä. Kohtaa x_0 sanotaan molemmissa tapauksissa funktion f **ääriarvokohdaksi** (lokaali minimi- tai maksimikohta) ja funktion arvoa $f(x_0)$ **ääriarvoksi** (minimi- tai maksimi(arvoksi)).

Esimerkki 5.17. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{3 - x}$ ääriarvot.

Ratkaisu: Funktio $f(x) = \dfrac{x^2}{3 - x}$ on määritelty, jatkuva ja derivoituva, kun $3 - x \neq 0$ eli, kun $x \neq 3$.

Tutkitaan derivaatan merkkiä. Funktion f derivaatta on

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{Dx^2 \cdot (3-x) - x^2 \cdot D(3-x)}{(3-x)^2} \\
&= \frac{2x \cdot (3-x) - (-1) \cdot x^2}{(3-x)^2} = \frac{6x - 2x^2 + x^2}{(3-x)^2} \\
&= \frac{-x^2 + 6x}{(3-x)^2}, \quad x \neq 3
\end{aligned}
$$

ja derivaatan nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{-x^2 + 6x}{(3-x)^2} &= 0 \\
-x^2 + 6x &= 0 \\
x(-x+6) &= 0 \\
x = 0 \ \text{ tai } \ x &= 6
\end{aligned}
$$

Derivaatan merkkikaavio/funktion kulkukaavio:

$-x^2 + 6x$	$-$	$+$	$+$	$-$
$(3-x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	aidosti vähenevä	aidosti kasvava	aidosti kasvava	aidosti vähenevä

0 3 6

Siten funktiolla f on ääriarvokohtina lokaali minimikohta $x = 0$ ja lokaali maksimikohta $x = 6$. Ääriarvot ovat

$$f(0) = \frac{0^2}{3-0} = 0 \ \text{(lokaali minimi)}$$

ja

$$f(6) = \frac{6^2}{3-6} = -12 \ \text{(lokaali maksimi).}$$

Raja-arvo äärettömyydessä

Seuraavaksi käsitellään tarkemmin (aikaisemmim: luku 5.1 ja 6. harjoitustehtävät) raja-arvon määrittämistä $\pm\infty$:ssä, minkä jälkeen osataan piirtää tarkemmin esimerkiksi rationaalifunktion kuvaaja. Lisäksi pääteltäessä, onko jokin funktion paikallisista ääriarvoista myös sen suurin tai pienin arvo koko määrittelyjoukossa, on yleensä tiedettävä, mitä funktion arvoille tapahtuu $\pm\infty$:ssä.

Funktiolla f on raja-arvo a äärettömyydessä, jos aina jostakin muuttujan x arvosta lähtien funktion f arvot saadaan miten lähelle tahansa lukua a. Tätä raja-arvoa merkitään

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

tai $f(x) \to a$, kun $x \to \infty$. Esimerkiksi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Vastaavasti funktiolla f on $-\infty$:ssä raja-arvo b, jos aina jotakin muuttujan x arvoa pienemmillä luvuilla funktion f arvot saadaan miten lähelle tahansa lukua b. Tätä raja-arvoa merkitään

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

tai $f(x) \to b$, kun $x \to -\infty$. Esimerkiksi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Esimerkki 5.18. Määritä raja-arvot

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2}{x^3+1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x+1}{3x^2+3}$.

Ratkaisu: Supistetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla ja käytetään tietoa $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^n} = 0$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio ja $n = 1, 2, \ldots$.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-2x+1}{3x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{3}{x^2}} = \frac{5}{3}$$

Rationaalifunktion $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja, kuvaajalla on aina **asymptootti**, joka kuvaa funktion f kulkua $\pm\infty$:ssä. Asymptootti on sellainen suora tai käyrä, jota funktion kuvaaja jatkuvasti lähestyy, mutta ei koskaan saavuta.

Lisäksi rationaalifunktion kuvaajalla on pystysuora asymptootti jokaisessa nimittäjän nollakohdassa. Lähestyttäessä nimittäjän nollakohtaa oikealta tai vasemmalta, funktion arvot aina joko kasvavat tai vähenevät rajatta.

Funktion kuvaajan piirtäminen

Funktion kuvaajan piirtämisessä voidaan hyödyntää muun muassa seuraavia funktion ominaisuuksia: määrittelyjoukko, nollakohdat, kulkukaavio ja ääriarvokohdat, raja-arvot $\pm\infty$:ssä.

Esimerkki 5.19. Piirrä funktion $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ kuvaaja.

Ratkaisu: Koska nimittäjä $1 + x^2 \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, funktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko. Rationaalifunktiolla ei ole pystysuoria asymptootteja.

Ratkaistaan funktion f nollakohdat:

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{1+x^2} &= 0 \\ 1-x^2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Tutkitaan funktion f kulkua. Funktio on rationaalifunktiona määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x \cdot (1+x^2) - 2x \cdot (1-x^2)}{1+x^2)^2} \\ &= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} &= 0 \\ -4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Derivaattafunktion merkin määrää osoittajassa oleva laskeva suora $-4x$, sillä nimittäjä on aina positiivinen. Siten funktio f on aidosti kasvava välillä $(-\infty, 0]$ ja aidosti vähenevä välillä $[0, \infty)$. Derivaatan nollakohta $x = 0$ on funktion f lokaali maksimikohta. Vastaava lokaali maksimiarvo on

$$f(0) = \frac{1-0^2}{1+0^2} = 1.$$

Ratkaistaan kuvaajan piirtämistä varten vielä raja-arvot $\pm\infty$:ssä:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Näin ollen funktion f kuvaajalla on vaakasuora asymptootti $y = -1$

(funktion kuvaajan kuva puuttuu)

Huomaa, että funktion f paikallinen maksimiarvo $f(0) = 1$ on myös sen suurin arvo koko reaalilukujen joukossa.

Funktion suurin ja pienin arvo

Esimerkiksi käytännön optimointiongelmissa on yleensä selvitettävä funktion suurin ja pienin arvo, eikä vain paikallisia maksimi- ja minimiarvoja.

Funktiolla f on kohdassa $x = x_0$ **suurin arvo** $f(x_0)$, jos funktion f **jokainen** arvo $f(x)$ toteuttaa ehdon $f(x) \leq f(x_0)$. Toisin sanoen funktio f saa kohdassa $x = x_0$ suurimman arvonsa koko määrittelyjoukossaan.

Funktiolla f on kohdassa $x = x_0$ **pienin arvo** $f(x_0)$, jos funktion f **jokainen** arvo $f(x)$ toteuttaa ehdon $f(x) \geq f(x_0)$. Toisin sanoen funktio f saa kohdassa $x = x_0$ pienimmän arvonsa koko määrittelyjoukossaan.

Huomautus 5.20. Funktiolla ei aina ole suurinta tai pienintä arvoa. Esimerkiksi funktiolla $f(x) = x$ ei ole suurinta eikä pienintä arvoa. Funktiolla $f(x) = x^2$ on pienin arvo $f(0) = 0$, mutta ei suurinta arvoa.

Jos funktio on **jatkuva suljetulla välillä** $[a, b]$, niin sillä on suurin ja pienin arvo tällä välillä (itse asiassa se saa myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvon väliltä). Jos funktio on lisäksi derivoituva välillä (a, b), voidaan sen suurin ja pienin arvo määrittää ilman kulkukaaviota **Fermat'n lauseen** avulla:

> Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Tällöin funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa.

Esimerkki 5.21. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 3x$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 3]$.

Ratkaisu: Koska f on polynomifunktiona jatkuva suljetulla välillä $[0, 3]$ ja derivoituva avoimella välillä $(0, 3)$, voidaan sen suurin ja pienin arvo määrittää ilman kulkukaaviota Fermat'n lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 3x^2 - 3 &= 0 \\
3x^2 &= 3 \\
x^2 &= 1 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Koska derivaatan nollakohdista vain $x = 1$ on välillä $[0, 3]$, saa funktio f suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä $x = 0$ tai $x = 3$, tai derivaatan nollakohdassa $x = 1$. Lasketaan funktion f arvot näissä kohdissa:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \\
f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 3 = 18 \\
f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 = -2
\end{aligned}
$$

Siten funktion f suurin arvo välillä $[0, 3]$ on 18 ja pienin arvo -2.

Esimerkki 5.22. Kanankasvattajalla on 40 metriä aitatarvikkeita. Hän tekee kanalan seinustalle suorakulmion muotoisen ulkotarhan, jonka yhtenä sivuna on kanalan seinä. Määritä suurimman aitauksen mitat, kun kanalan seinän pituus on 24 metriä.

Ratkaisu: Olkoon aitauksen leveys x metriä. (kuva puuttuu!!)

Alueen pinta-alan funktio on

$$A(x) = x(40 - 2x),$$

joka on määritelty, kun $x > 0$, $40 - 2x > 0$, eli kun $x < 20$ ja $40 - 2x \leq 24$, eli kun $x \geq 8$, missä viimeinen määrittelyehto saadaan kanalan seinän pituudesta. Siis $A(x) = x(40 - 2x)$, missä $8 \leq x < 20$.

Tapa 1.

$$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

Derivoidaan pinta-alan funktio ja tutkitaan derivaattafunktion merkkiä.

$$\begin{aligned} A'(x) = 40 - 4x &= 0 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Koska derivaattafunktio A' on laskeva suora, on funktion A ääriarvokohta $x = 10$ lokaali maksimikohta. Kulkukaaviosta nähdään myös, että funktio A saa suurimman arvonsa tässä kohdassa. Siten suurimman aitauksen leveys on 10 metriä, jolloin aitauksen pituudeksi tulee $40 - 2 \cdot 10 = 20$ metriä.

Tapa 2.

Määrittelyjoukko $[8, 20)$ voidaan laajentaa suljetuksi väliksi $[8, 20]$ hyväksymällä mukaan arvoa $x = 20$ vastaava "surkastunut" suorakulmio. Tällöin funktio A on jatkuva suljetulla välillä $[8, 20]$ ja derivoituva välillä $(8, 20)$. Fermat'n lauseen nojalla pinta-alafunktion A suurin arvo on jokin seuraavista (derivaatan nollakohdat tuli jo ratkaistua tavan 1 laskuissa):

$$\begin{aligned} A(8) &= 8 \cdot (40 - 2 \cdot 8) = 192 \\ A(20) &= 20 \cdot (40 - 2 \cdot 20) = 0 \\ A(10) &= 10 \cdot (40 - 2 \cdot 10) = 200 \end{aligned}$$

Siten aitauksen suurin mahdollinen pinta-ala saadaan, kun $x = 10$ (aitauksen leveys). Tällöin aitauksen pituus on 20 metriä.

Tapa 3.

Funktion A kuvaaja on osa alaspäin aukeavaa paraabelia (välillä $[8, 20)$). Siten funktio A saa suurimman arvonsa paraabelin huippukohdassa (ks. 7. harjoitustehtävät)

$$x = \frac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10$$

Näin ollen suurimman aitauksen leveys on 10 metriä ja pituus 20 metriä.

Jos funktio ei ole määritelty suljetulla välillä tai se ei ole jatkuva, sillä ei välttämättä ole suurinta tai pienintä arvoa. Tällöin on vain tutkittava funktion kulkua (määrittelyjoukko, monotonisuus, lokaalit ääriarvot, mahdollisesti raja-arvot $\pm\infty$:ssä) ja pääteltävä saatujen tietojen perusteella funktion suurimman ja pienimmän arvon olemassaolo sekä mahdolliset suurin ja pienin arvo.

Kerrataan vielä luvun lopuksi yhdistetyn funktion derivoimista. Jokainen seuraavista derivoimissäännöistä tulee suoraan yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä eli ketjusäännöstä

$$D\left(g\left(f(x)\right)\right) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x).$$

Koska $Dx^r = rx^{r-1}$, niin $D\left(h(x)\right)^r = r\left(h(x)\right)^{r-1} \cdot h'(x)$.

Koska $De^x = e^x$, niin $De^{h(x)} = e^{h(x)} \cdot h'(x)$.

Koska $D\ln x = \frac{1}{x}$, $x > 0$, niin $D\ln\left(h(x)\right) = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$, $h(x) > 0$.

Koska $D\sin x = \cos x$, niin $D\sin\left(h(x)\right) = \cos\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$.

Koska $D\cos x = -\sin x$, niin $D\cos\left(h(x)\right) = -\sin\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$.