6 Integraalilaskentaa

6.1 Integraalifunktio

Funktion f **integraalifunktioksi** sanotaan funktiota F, jonka derivaatta on f. Siis

$$F'(x) = f(x)$$

määrittelyjoukon jokaisella muuttujan arvolla x. Merkitään $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Integraalifunktion määrittämistä (eli derivoinnin käänteistoimitusta) sanotaan **integroinniksi**. Integraalimerkinnässä d:n jäljessä oleva kirjain ilmoittaa muuttujan, jonka suhteen integroidaan.

Huomautus 6.1. Funktiolla on äärettömän monta integraalifunktiota. Jos funktio F on funktion f integraalifunktio, niin kaikki funktiot, jotka ovat muotoa $F(x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on jokin vakio, ovat myös funktion f integraalifunktioita:

$$D\,(F(x) + c) = DF(x) + Dc = F'(x) + 0 = f(x).$$

Toisaalta, funktion f kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on jokin vakio. Vakiota c sanotaan funktion **integroimisvakioksi**.

Esimerkki 6.2. Olkoon $f(x) = 2x + 3$.

a) Määritä funktion f integraalifunktiot.
b) Määritä funktion f se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta.

Ratkaisu: a)

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x + c,$$

koska

$$F'(x) = D(x^2 + 3x + c) = 2x + 3 = f(x).$$

b) Koska integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta, on $F(1) = 2$, eli

$$\begin{aligned} 1^2 + 3 \cdot 1 + c &= 2 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Näin ollen $F(x) = x^2 + 3x - 2$.

Integroimissääntöjä

Derivoimissäännöistä voidaan johtaa seuraavat integroimissäännöt. Oletetaan, että funktioilla f ja g on integraalifunktiot ja $a \in \mathbb{R}$ on vakio.

1. $\int a\,dx = ax + c$ (vakion integrointi)

2. $\int x^r \, dx = \dfrac{1}{r+1} x^{r+1} + c$, missä $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$ (potenssifunktion integrointi)

3. $\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$ (vakion siirto)

4. $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$ (summan integrointi)

Esimerkki 6.3. Integroi polynomifunktio $p(x) = 3x^4 - 3x^2 + 7x - 2$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\int p(x) \, dx &= \int (3x^4 - 3x^2 + 7x - 2) \, dx \\
&= 3 \cdot \frac{1}{4+1} x^{4+1} - 3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 7 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} - 2x + c \\
&= \frac{3}{5} x^5 - x^3 + \frac{7}{2} x^2 - 2x + c
\end{aligned}$$

Tarkistetaan vastaus derivoimalla:

$$D(\frac{3}{5}x^5 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + c) = \frac{3}{5} \cdot 5x^{5-1} - 3x^{3-1} + \frac{7}{2} \cdot 2x^{2-1} - 2 = 3x^4 - 3x^2 + 7x - 2$$

Edellä ollut potenssifunktion integroimissääntö ei sovellu tapaukseen $r = -1$. Tarkastellaan seuraavaksi funktion $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $x \neq 0$, integroimista. Koska

$$D \ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

on potenssifunktion $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $x \neq 0$, integraalifunktiot muotoa

$$F(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c, \;\; c \in \mathbb{R}, \; x \neq 0.$$

(Huomaa, että kun $x < 0$, on $\ln |x| = \ln(-x)$, jolloin $D \ln(-x) = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$)

Eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden integroimissäännöt seuraavat suoraan niiden derivoimissäännöistä:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ \ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

Yhdistetyn funktion integrointi ei aina ole kovinkaan helppoa, eikä onnistu alkeisfunktioiden integroimissääntöjen avulla. Seuraavissa yhdistetyn funktion integroimissäännöissä on aina sisäfunktion derivaatta kertojana.

Koska $D\,(h(x))^{r+1} = (r+1)\,(h(x))^r \cdot h'(x)$, niin

$$\int (h(x))^r \cdot h'(x)\,dx = \frac{1}{r+1}\,(h(x))^{r+1} + c,\ \ r \neq -1.$$

Koska $De^{h(x)} = e^{h(x)} \cdot h'(x)$, niin

$$\int e^{h(x)} \cdot h'(x)\,dx = e^{h(x)} + c.$$

Koska $D\ln(h(x)) = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$, niin

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \int \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x)\,dx = \ln|h(x)| + c,\ \ h(x) \neq 0.$$

Koska $D\sin(h(x)) = \cos(h(x)) \cdot h'(x)$, niin

$$\int \cos(h(x)) \cdot h'(x)\,dx = \sin(h(x)) + c.$$

Koska $D\cos(h(x)) = -\sin(h(x)) \cdot h'(x)$, niin

$$\int \sin(h(x)) \cdot h'(x)\,dx = -\cos(h(x)) + c.$$

Tällä kurssilla yhdistetyn funktion integroimisessa toimii hyvin apuna seuraava kahdeksan kohdan ohje:

1. Tunnista yhdistetty funktio.

2. Mikä on sisäfunktio? Mikä on sen derivaatta?

3. Onko sisäfunktion derivaatta kertojana? Kyllä olisi muuten, mutta vakio on väärä.

4. Siirrä väärä vakio integraalin eteen.

5. Lisää oikea vakio ja korjaa se ulkopuolella.

6. "Peitä" sisäfunktion derivaatta ja integroi ulkofunktio.

7. Sievennä tulos.

8. Tarkista derivoimalla (TD).

Esimerkki 6.4. Integroi funktiot

a) $f(x) = 4xe^{x^2}$ b) $g(x) = \cos 5x$

c) $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ d) $i(x) = (x-1)(x^3+2x)$

Ratkaisu:

a)

$$\int f(x)\,dx = \int 4xe^{x^2}\,dx = 4\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 4\int 2xe^{x^2}\,dx = 2e^{x^2} + c$$

b)

$$\int g(x)\,dx = \int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int 5\cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x + c$$

c)

$$\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 4\int 2x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\ln|x^2+1| + c = 2\ln(x^2+1) + c$$

d) Koska tulolle ei ole erityistä integroimissääntöä, niin kerrotaan sulut auki.

$$i(x) = (x-1)(x^3+2x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x$$

$$\int i(x)\,dx = \int (x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x)\,dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + c$$

Esimerkki 6.5. Integroi funktiot

a) $f(x) = 3x\sin x^2$ b) $g(x) = 3x\sin x$

Ratkaisu:

a)

$$\int 3x\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot 3\int 2x\sin x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot(-\cos x^2) + c = -\frac{3}{2}\cos x^2 + c$$

b) ?

b)-kohdan funktion integrointiin sopii hyvin ns. **osittaisintegrointi**, joka ei kuulu tenttialueeseen, vaan käsitellään kurssilla "ylimääräisenä", tulevia opintoja ajatellen varmasti hyödyllisenä integroimiskeinona.

***. Osittaisintegrointi**

Tulon derivoimissäännön mukaan

$$Df(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

joten

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)\,dx = f(x)g(x) + c.$$

Integroidaan summa erikseen ja siirretään toinen integroitavista yhtälön oikealle puolelle, jolloin saadaan osittaisintegroimissääntö:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Ratkaistaan nyt esimerkin 6.5 b)-kohta: $\int \sin x \cdot 3x\,dx$ "valitsemalla" $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = 3x$. Tällöin $f(x) = -\cos x$ ja $g'(x) = 3$. Osittaisintegroimalla:

$$\begin{aligned}\int \sin x \cdot 3x\,dx &= -\cos x \cdot 3x - \int -\cos x \cdot 3\,dx \\ &= -3x\cos x + 3\int \cos x\,dx \\ &= -3x\cos x + 3\sin x + c\end{aligned}$$

Tarkistus:

$$D\left(-3x\cos x + 3\sin x + c\right) = -3\cos x + 3x\sin x + 3\cos x = 3x\sin x$$

Huomaa, että jos olisi valittu alussa $f'(x) = 3x$ ja $g(x) = \sin x$, niin osittaisintegrointikaavan käytöstä ei olisi ollut hyötyä, sillä yhtälön oikealle puolelle olisi jäänyt integroitavaksi funktio $\frac{3}{2}x^2\cos x$.

6.2 Määrätty integraali

Olkoon f integroituva välillä $[a, b]$. Funktion f **määrätty integraali** a:sta b:hen on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ja sitä merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Summaa $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$ sanotaan välisummaksi (katso kurssin kotisivulta aiheeseen liittyvä GeoGebra-demo). Väli $[a, b]$ on jaettu n:ään yhtä pitkään osaväliin ja kunkin osavälin pituus on

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Pisteet $x_1, x_2, \ldots x_n$ kuuluvat vastaaville osaväleille. Huomaa, että kun $n \to \infty$, niin $\Delta x \to 0$.

Jos funktio f on jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$, antaa välisumma arvion funktion kuvaajan ja x-akselin välisen alueen pinta-alalle A välillä $[a, b]$ (**kuva puuttuu**). Kun osavälien lukumäärä n kasvaa, pinta-alan arvio paranee ja

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\, dx = A.$$

Olkoon funktio f jatkuva ja $a < b$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\, dx = A, \text{ kun } f(x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in [a, b].$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -A, \text{ kun } f(x) \leq 0 \text{ kaikilla } x \in [a, b].$$

Lukuja a ja b sanotaan **integroimisrajoiksi**: a on alaraja ja b on yläraja.

Esimerkki 6.6. Laske määrätty integraali

$$\int_0^3 f(x)\, dx, \text{ kun } f(x) = 6 - 2x.$$

Ratkaisu:

Koska $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 3]$, niin

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^3 (6-2x)\, dx = A$$

(kuva puuttuu) ja x-akselin ja laskevan suoran $y = -2x + 6$ rajoittama alue välillä $[0, 3]$ on suorakulmainen kolmio, jonka pinta-ala A on

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

Siis

$$\int_0^3 f(x)\, dx = 9.$$

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Olkoot f ja g integroituvia välillä $[a, b]$ ja $k \in \mathbb{R}$ vakio.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (integroimisrajat yhtä suuret)
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (integroimisrajojen vaihto)
3. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (vakion siirto)
4. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (summan määrätty integraali)
5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (määrätyn integraalin yhteenlaskuominaisuus)

Seuraava tulos yhdistää toisiinsa määrätyn integraalin ja integraalifunktion käsitteet. Sen avulla pystytään laskemaan helposti muidenkin funktioiden määrättyjä integraaleja kuin vain sellaisten erikoistapausten (esimerkki 6.6), jotka saadaan geometrisesti pinta-alana.

Analyysin peruslause

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{b} F(x) = F(b) - F(a),$$

missä F on funktion f jokin integraalifunktio.

Huomautus 6.7. Merkintä $\Big/_{\!a}^{b} F(x)$ luetaan "sijoitus a:sta b:hen Fx" ja tarkoittaa siis, että vähennetään toisistaan yläraja ja alaraja sijoitettuina integraalifunktion lausekkeeseen. Siten myös integroimisvakio c supistuu sijoituksessa pois, eli käytännössä voidaan valita $c = 0$.

Määrätyn integraalin laskeminen analyysin peruslauseella on näin ollen kaksivaiheinen. Ensin määritetään funktion jokin integraalifunktio (eli helpoin: $c = 0$), jonka jälkeen tehdään sijoitus, eli lasketaan integraalifunktion arvojen erotus.

Esimerkki 6.8. Lasketaan esimerkin 6.6 määrätty integraali analyysin peruslauseella:

$$\int_0^3 (6 - 2x)\,dx = \Big/_{\!0}^{3} (6x - x^2) = 6 \cdot 3 - 3^2 - \left(6 \cdot 0 - 0^2\right) = 18 - 9 = 9.$$

Esimerkki 6.9. Laske määrätty integraali $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

Ratkaisu:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \Big/_{\!1}^{e} \ln|x| = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Pinta-alan laskeminen

1. Funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittama alue

Aiemmin jo todettiin, että funktion f kuvaajan, x-akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-ala

$$A = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ jos } f(x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in [a, b].$$

kuva puuttuu

Jos $f(x) < 0$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin määrätty integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ on negatiivinen ja itseisarvoltaan yhtä suuri kuin funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[a, b]$ rajoittaman alueen pinta-ala. Siis

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

kuva puuttuu

Esimerkki 6.10. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 8x$ kuvaajan ja x-akselin rajoittaman kaksiosaisen alueen pinta-ala.

Ratkaisu:

Ratkaistaan funktion f nollakohdat:

$$2x^3 - 8x = 0$$
$$2x(x^2 - 4) = 0,$$

josta saadaan ratkaisuksi $x = 0$ tai $x = \pm 2$. Koska jatkuva funktio f voi vaihtaa merkkiään vain ohitettaessa nollakohta, voidaan aina testipisteiden avulla selvittää funktion merkki eri nollakohtien välillä:

$$f(-1) = 6 > 0 \text{ ja } f(1) = -6 < 0$$

Siten

$$
\begin{aligned}
A = A_1 + A_2 &= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\,dx - \int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\,dx \\
&= \Big/_{-2}^{0} (\frac{1}{2}x^4 - 4x^2) - \Big/_{0}^{2} (\frac{1}{2}x^4 - 4x^2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 - (\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^2) \\
&- (\frac{1}{2} \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2) + (\frac{1}{2} \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2) \\
&= -8 + 16 - 8 + 16 = 16
\end{aligned}
$$

2. Kahden funktion kuvaajan rajoittama alue

Määrätyn integraalin avulla voidaan laskea myös kahden funktion kuvaajan rajoittaman alueen pinta-ala. Jos välillä $[a, b]$ on voimassa $f(x) \geq g(x)$, niin funktioiden f ja g kuvaajien sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-ala (**kuva puuttuu**)

$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx.$$

Huomaa, että jos on vain annettu kaksi funktiota f ja g, on ensin tutkittava kumpi kuvaajista on ylempänä ja kumpi alempana milloinkin. Sen perusteella integroitava lauseke on eri osaväleillä joko $f(x) - g(x)$ tai $g(x) - f(x)$.

Esimerkki 6.11. Määritä käyrien $y = x^2 - 2x - 1$ ja $y = -2x^2 - 4x$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu:

Ratkaistaan käyrien leikkauskohdat. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = -2x^2 - 4x \end{cases}$$

jonka ratkaisuna on $x = -1$ tai $x = \frac{1}{3}$. Merkitään $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ja $g(x) = -2x^2 - 4x$. Koska alaspäin aukeava paraabeli $g(x) = -2x^2 - 4x$ on ylempänä kuin ylöspäin aukeava paraabeli $f(x) = x^2 - 2x - 1$ leikkauskohtien välillä ($g(0) = 0 > f(0) = -1$), on paraabelien, eli funktioiden f ja g kuvaajien rajoittaman alueen pinta-ala

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{\frac{1}{3}} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} (-2x^2 - 4x - (x^2 - 2x - 1))\,dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{1}{3}} (-2x^2 - 4x - x^2 + 2x + 1)\,dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{1}{3}} (-3x^2 - 2x + 1)\,dx \\
&= \Big/_{-1}^{\frac{1}{3}} (-x^3 - x^2 + x) \\
&= -(\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} - \Big(-(-1)^3 - (-1)^2 + (-1)\Big) = \ldots = 1\frac{5}{27}\,.
\end{aligned}$$