Vektorianalyysi

k. 2014

Ex tempore 1

ke 5.3.

1. Anna seuraavien käyrien karteesiset yhtälöt ja hahmottele käyrät:

   a. $\vec{c}(t) = t^2\,\hat{i} + 2t\,\hat{j}$

   b. $\vec{c}(t) = (2t-1)\,\hat{i} + (4t+3)\,\hat{j}$

   c. $\vec{c}(t) = e^t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j}$

2. Laske viivaintegraali

$$\int_C y\,ds$$

   kun käyränä on (x,y)-koordinaatiston ylätasossa ($y > 0$) oleva a-säteisen puoliympyrän kaari. Aloita muodostamalla käyrälle parametriesitys.

FYSA114 ExT 1

$\boxed{1.}$ Halutaan ilmoittaa käyrät muodossa $y = y(x)$. Ratkaistaan t ja sijoitetaan.

a.) $\bar{r}(t) = t^2\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

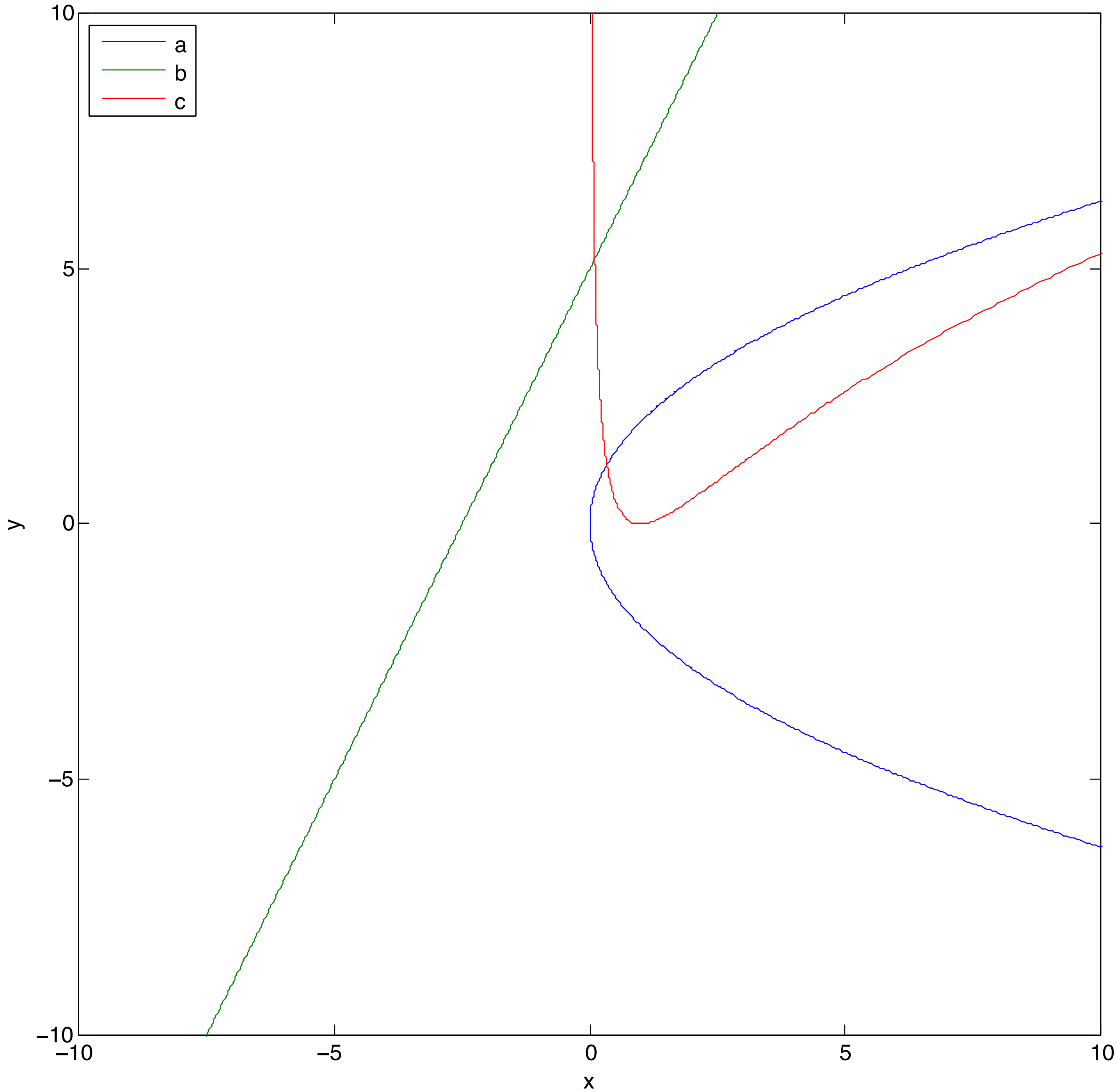
$$\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow t = \pm\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$$

b.) $\bar{r}(t) = (2t-1)\hat{\imath} + (4t+3)\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = 4t+3 \end{cases} \Rightarrow 2t = x+1$$
$$\Rightarrow y = 2x+2+3 = 2x+5$$

c.) $\bar{r}(t) = e^t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$, $x>0$

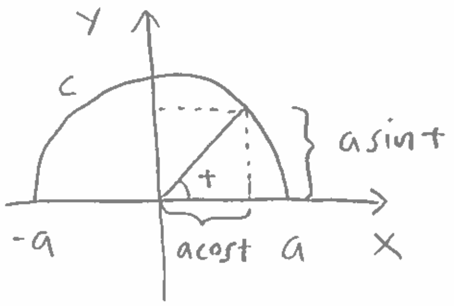
$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \ln x$$
$$\Rightarrow y = (\ln x)^2$$



a
b
c
10
5
0
−5
−10
y
−10
−5
0
5
10
x

FYSA114 ExT1

$\boxed{2.}$ Parametrisoidaan origokeskeinen a-säteinen puoliympyräkäyrä.



Eräs parametrisaatio saadaan kuvasta:

$\vec{r}(t) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = a\cos t\,\hat{\imath} + a\sin t\,\hat{\jmath}$

$t \in [0,\pi]$. Tämä käyrä kulkee reitin vastapäivään. $(a>0)$

Funktion $f(\vec{r})$ polkuintegraali käyrän C yli on:

$$\int_C f(\vec{r})\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f(\vec{r}(t)) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt \quad , \quad t_1 > t_0$$

Nyt $f(\vec{r}(t)) = a\sin t$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\,\hat{\imath} + a\cos t\,\hat{\jmath} \quad , \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = a$$

$$\Rightarrow \int_C f(\vec{r})\,ds = \int_0^{\pi} a\sin t \cdot a \cdot dt = -a^2 \Big/_0^{\pi} \cos t = -a^2(-1-1) = 2a^2$$

FYSA114 ExT1

$\boxed{2.}$ Parametrisoidaan puoliympyrä suoraan yhtälöstä:

$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow y = \underset{\substack{\uparrow \\ y>0}}{\overset{+}{(-)}}\sqrt{a^2-x^2}$$

Valitaan:

$$x = t$$
$$y = \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-t^2} \Rightarrow \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \sqrt{a^2-t^2}\,\hat{\jmath}\,, \quad t \in [-a, a]$$

Tämä käyrä kulkee myötäpäivään.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\hat{\jmath}\,, \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+\left(-\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-t^2} + \frac{t^2}{a^2-t^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

$$f(\vec{r}(t)) = \sqrt{a^2-t^2}$$

$$\Rightarrow \int_C f(\vec{r})\,ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-t^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = a\int_{-a}^{a} dt = 2a^2$$

Saatiin sama tulos molemmilla parametrisaatioilla.

Vektorianalyysi

k. 2014

Ex Tempore 2

Ma 10.3.

1. Kirjoita parametriesitys $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ käyrälle $y = x^2$, $z = 0$, missä käyrän alkupiste on (-1,1,0) ja loppupiste on (1,1,0). Piirrä kuva. Laske vektorikentän $\vec{F} = 5x^2\hat{\imath} + 6y\hat{\jmath} + 7z\hat{k}$ käyräintegraali tätä käyrää pitkin.

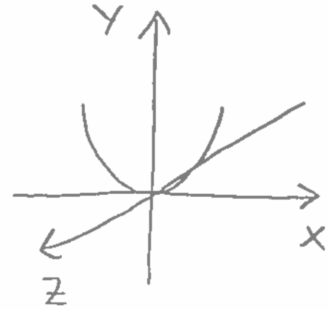
2. Onko edellisen tehtävän kenttä $\vec{F} = 5x^2\hat{\imath} + 6y\hat{\jmath} + 7z\hat{k}$ konservatiivinen? Jos on, niin mikä on sen potentiaali $\phi(x, y, z)$? Mikä on $\vec{F}$:n käyräintegraali pisteestä (-1,1,0) pisteeseen (1,1,0) pisteitä yhdistävää suoraa pitkin?

3. Onko kenttä $\vec{G} = 6y\hat{\imath} + 5x^2\hat{\jmath} + 7z\hat{k}$ konservatiivinen?

FYSA114 ExT 2

$\boxed{1.}$ $C: \quad y = x^2, \; z = 0 \quad , \quad (-1,1,0) \rightarrow (1,1,0)$

Valitaan $x = t$, koska tiedetään mitä y on x:in funktiona.



$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2t\hat{\jmath}$$

Nyt $t \in [-1,1]$ koska $\vec{r}(-1) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ ja $\vec{r}(1) = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

$\vec{F}(\vec{r}) = 5x^2\hat{\imath} + 6y\hat{\jmath} + 7z\hat{k}$, $\vec{F}(\vec{r}(t)) = 5t^2\hat{\imath} + 6t^2\hat{\jmath}$

Vektorikentän polkuintegraali on

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_{-1}^{1} (5t^2\hat{\imath} + 6t^2\hat{\jmath}) \cdot (\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath})\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (5t^2 + \underbrace{12t^3}_{\text{Antaa 0 koska } t^3 \text{ on pariton ja rajat ovat symmetriset}})\, dt = 5\int_{-1}^{1} t^2\, dt = 5 \Big/_{-1}^{1} \frac{t^3}{3} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

FYSA114 ExT 2

$\boxed{2}$ Vektorikenttä on konservatiivinen, mikäli $\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$. Nyt $\vec{F}(\vec{r}) = 5x^2\hat{\imath} + 6y\hat{\jmath} + 7z\hat{k}$

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 5x^2 & 6y & 7z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0$$

$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r})$ on konservatiivinen.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &=: \partial_x \\ \frac{\partial}{\partial y} &=: \partial_y \\ \frac{\partial}{\partial z} &=: \partial_z \end{aligned}}$$

Jos vektorikenttä on konservatiivinen, niin sen polkuintegraali riippuu vain polun alku- ja päätepisteistä.

$\Rightarrow \int_D \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{10}{3}$ kun D on suora pisteiden $(-1,1,0)$ ja $(1,1,0)$ välillä.

Konservatiiviselle vektorikentälle löytyy $\phi = \phi(x,y,z)$, mille $\nabla\phi = \vec{F}(\vec{r})$. Etsitään $\phi(x,y,z)$.

$\hookrightarrow$ $\partial_x \phi = F_x = 5x^2 \Rightarrow \phi(x,y,z) = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C(y,z)$

$\partial_y \phi = F_y = 6y$

$\partial_z \phi = F_z = 7z$

Integrointivakio tulee valita s.e. se häviää derivoitaessa xin suhteen. Yleisin mahdollinen tapaus on $C = C(y,z)$.

FYSA114 ExT2

$\boxed{2.}$ ...jatkuu.

Nyt $\partial_y \phi = 6y = \partial_y\left(\frac{5}{3}x^3 + C(y,z)\right) = \partial_y C(y,z)$

$\Rightarrow \quad C(y,z) = \int 6y\,dy = 3y^2 + D(z)$

Nyt integrointivakio valitaan siten, että se häviää derivoitaessa y:n suhteen. Yleisin mahdollinen tapaus on $D = D(z)$ koska C ei sisällä x-riippuvuutta.

$\Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = \frac{5}{3}x^3 + 3y^2 + D(z)$

$\partial_z \phi = 7z = \partial_z D(z) \quad \Rightarrow \quad D(z) = \int 7z\,dz = \frac{7}{2}z^2 + E$

$\Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = \frac{5}{3}x^3 + 3y^2 + \frac{7}{2}z^2 + E$.

Integrointivakion arvolla ei ole merkitystä.

Konservatiivisen vektorikentän polkuintegraali saadaan laskettua potentiaalifunktion arvojen erotuksena käyrän päätepisteiden välillä:

$$\int_D \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \phi(\text{loppu}) - \phi(\text{alku}) = \phi(1,1,0) - \phi(-1,1,0)$$

$$= \frac{5}{3} + 3 + E - \left(-\frac{5}{3} + 3 + E\right) = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

FYSA114 ExT2

$\boxed{3.}$ $\vec{G}(\vec{r}) = 6y\hat{\imath} + 5x^2\hat{\jmath} + 7z\hat{k}$

$\vec{G}$ on konservatiivinen mikäli $\nabla \times \vec{G} = 0$.

$$\nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 6y & 5x^2 & 7z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(10x - 6) \neq 0$$

$\Rightarrow$ kenttä ei ole konservatiivinen.