Vektorianalyysi
k. 2014

Ex Tempore 11
Ke 23.4.

1. Laske vektorikenttien $\vec{F} = x\hat{i} - 2y\hat{j} + 4\hat{z}$ ja $\vec{G} = (x^2 + y^2)\hat{i} + (y^2 - z^2)\hat{j} + z\hat{k}$ pintaintegraalit

   $$\oiint \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{ja} \quad \oiint \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

   pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pinnan yli. Käytä Gaussin kaavaa, mitä varten ensin on laskettava kenttien divergenssit.

2. D on alue, jota rajoittavat paraboloidi $z = x^2 + y^2$ ja taso $z = 1$. Laske alueen pinnan S yli otettu pintaintegraali

   $$\oiint_S \left(y\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k} \right) \cdot d\vec{S}.$$

   Vihje: Integroinnissa kannatta käyttää sylinterikoordinaatteja, jolloin $dV = \rho d\rho d\phi dz.$

3. Laske vektorikentän $\vec{F} = (y + xz)\hat{i} + (y + yz)\hat{j} - (2x + z^2)\hat{k}$ vuo pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sen osan läpi, jolle $x, y, z \geq 0.$

   Neuvo: Tarkastele ensin suljettua kappaletta, jonka muodostavat tämä pallopinnan osa ja koordinaattitasot. Laske vuo tämän kappaleenpinnan läpi Gaussin kaavalla ja vähennä tuloksesta vuot tasopintojen läpi.

FYSA114 ExT11

1. $\vec{F} = x\hat{i} - 2y\hat{j} + 4z\hat{k}$, $\vec{G} = (x^2+y^2)\hat{i} + (y^2 - z^2)\hat{j} + z\hat{k}$

1° Laske $\oint_S F \cdot d\vec{s}$ kun $S = \partial B(0;a)$ eli origokeskeinen a-säteinen pallokuori. Pinta S on suljettu, joten käytetään Gaussin kaavaa:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

, missä V on a-säteinen origokeskeinen pallo.

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = 3 \int_V dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3.$$

2° Laske $\oint_S G \cdot d\vec{s}$ Gauss $\Rightarrow$ $\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{G}\, dV$

$$\nabla \cdot \vec{G} = 2x + 2y + 1$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{G}\, dV = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, (\underbrace{2r\cos\phi\sin\theta} + \underbrace{2r\sin\phi\sin\theta} + 1) r^2 \sin\theta$$

Häviävät ϕ-integraalissa koska pallo on symmetrinen x- sekä y-suunnissa ja x ja y ovat parittomia funktioita.

$$= \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; r^2 \sin\theta = \frac{4}{3}\pi a^3$$

FYSA114 ExT11

$\boxed{2}$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \overline{B}(0;1),\ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$

$S = \partial D$, S on suljettu $\Rightarrow$ Gauss

$$\oint_S \underbrace{(y\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k})}_{\vec{F}} \cdot d\vec{S} = \int_D \nabla \cdot F \, dV = \int_D 2z \, dV$$

$$= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r^2}^1 dz\ z \cdot \underbrace{r}_{|J|} = 4\pi \int_0^1 dr\, r \Big/_{r^2}^{1} \tfrac{1}{2} z^2$$

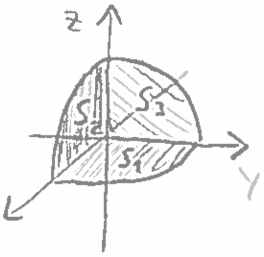
$$= 2\pi \int_0^1 dr\, r(1-r^4) = 2\pi \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{6}r^6 = 2\pi \underbrace{\left(\tfrac{3}{6} - \tfrac{1}{6}\right)}_{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{3}$$

FYSA114 ExT11

$\boxed{3.}$ $\vec{F} = (y+xz)\hat{\imath} + (y+yz)\hat{\jmath} - (2x+z^2)\hat{k}$

Laske $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{s}$, missä S on osa pallopintaa

$x^2+y^2+z^2=a^2$, mille $x,y,z \geq 0$.



Tarkastellaan suljettua pintaa S_{TOT} joka on S suljettuna koordinaattitasoilla.

$$\text{Gauss} \Rightarrow \oint_{S_{TOT}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \int(\cancel{z} + 1 + \cancel{z} - \cancel{2z})\, dV$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{6}\pi a^3$$

Nyt $\oint_{S_{TOT}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{s}$,

missä S_1, S_2 ja S_3 ovat ne a-säteiset $\frac{1}{4}$-ympyrät, mitkä sulkevat pinnan S.

S_1: xy-taso, $z=0$ ja $d\vec{s} = -\hat{k}\, ds$ $\qquad \int_{S_1}(y\hat{\imath} + y\hat{\jmath} - 2x\hat{k})\cdot d\vec{s} = \int_{S_1} 2x\, ds$

Lasketaan vuo ulos pinnasta.

$$= 2\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, r\cos\theta\; r = 2\int_0^a dr\, r^2 \underbrace{\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta}_{1} = 2 \Big/_0^a \frac{r^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

FYSA114 ExT 11

$\boxed{3}$ S_2 : xz − taso, $y=0$ ja $d\vec{s} = -\hat{j}\,ds$

$$\int_{S_2} \underbrace{(xz\hat{i} - (2x+z^2)\hat{k}) \cdot (-\hat{j}\,ds)}_{=0} = 0$$

S_3 : yz − taso, $x=0$ ja $d\vec{s} = -\hat{i}\,ds$

$$\int_{S_3} (y\hat{i} + (y+yz)\hat{j} - z^2\hat{k}) \cdot (-\hat{i}\,ds)$$

$$= -\int_{S_3} y\,ds = -\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \; r\cos\theta \cdot r = -\frac{a^3}{3}$$

$\uparrow$ S_1:n laskun perusteella.

Huom. nyt y on vaaka-akseli ja napakoordinaatteim. on $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \int_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint_{S_{tot}} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{2a^3}{3} - 0 + \frac{a^3}{3} = \frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{a^3}{6}(\pi - 2) .$$