Vektorianalyysi
k. 2014

Ex Tempore 12
Ma 5.5.

1. Olkoon $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}.$ Laske Stokesin teoreemaa käyttäen käyräintegraali

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

jossa C on yz-tasossa oleva käyrä, joka kulkee pisteestä (0,1,0) y-akselia pitkin origoon, siitä z-akselia pitkin pisteeseen (0,0,1) ja tästä yksikköympyrän kaaren neljännestä pitkin lähtöpisteeseen (0,1,0).

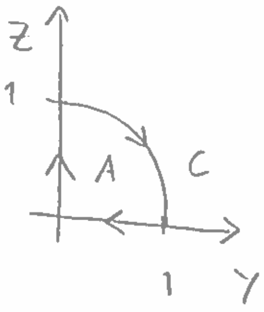
2. Laske Greenin teoreeman avulla käyräintegraali

$$\oint_C \left[xy^2 dx + (x-y)dy \right],$$

jossa C on sen kolmion reuna, jonka kärjet ovat pisteissä (0,0), (1,0) ja (0,2) ja kiertosuunta on tämän järjestyksen mukainen.

FYSA114 ExT12

$\boxed{1.}$ $\vec{F}(\vec{r}) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$



$$\oint_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \underset{\uparrow}{=} \int_A \nabla\times\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$$

Käyrä C on suljettu => Stokes

Parametrisoidaan pinta A

$$y = r\cos\theta, \quad r \in [0,1]$$
$$z = r\sin\theta, \quad \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{\jmath} + r\sin\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\hat{\jmath} + \sin\theta\,\hat{k}, \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -r\sin\theta\,\hat{\jmath} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) = r\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{S} = -r\hat{\imath}\,dr\,d\theta$$

Polusta saadaan oikean käden säännöllä tämä merkki.

Sitten roottori:
$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$$

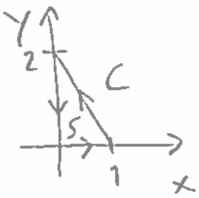
$$\Rightarrow \int_A \nabla\times\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})\cdot r\hat{\imath} = \int_0^1 dr\,r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

FYSA114 ExT 12

$\boxed{2.}$

$$\oint_C \left(xy^2\,dx + (x-y)\,dy\right) = \oint_C \underbrace{\left(xy^2\hat{\imath} + (x-y)\hat{\jmath}\right)}_{\vec{F}(\vec{r})}\cdot d\vec{r}$$



$y = 2-2x$

$$= \int_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dS = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy\,(1-2xy)$$

Käyrä on suljettu => Green

Merkki oikean käden säännön mukaan käyrästä C.

$$= \int_0^1 dx \Big/_0^{2-2x} y - xy^2 = \int_0^1 dx\left(2-2x - x(2-2x)^2\right)$$

$$= \int_0^1 dx\left(2-2x-4x+8x^2-4x^3\right)$$

$$= \int_0^1 dx\left(2-6x+8x^2-4x^3\right) = \Big/_0^1 2x - 3x^2 + \frac{8}{3}x^3 - x^4$$

$$= 2 - 3 + \frac{8}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$