Vektorianalyysi

k. 2014

Ex Tempore 4

Ma 17.3.

1. Laske seuraavien funktioiden gradientit ∇f annetuissa pisteissä:
   a. $f(x,y)=x^2-y^2$ pisteessä (2,-1)
   b. $f(x,y,z)=xy^2z^3$ pisteessä (3,-1,2)
   c. $f(x,y,z)=\sin x\cos y\tan z$ pisteessä $(\pi/6,\pi/4,\pi/3)$
2. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $f(x,y)=x^2y$.
   a. Laske *f*:n gradientti.
   b. Laske *f*:n suunnattu derivaatta vektorin $\vec{u}=\frac{4}{5}\hat{\imath}-\frac{3}{5}\hat{\jmath}$ suuntaan pisteessä (1,2).
   c. Mihin suuntaan *f* kasvaa nopeiten pisteessä (1,2)?
3. Funktiolla $f(x,y)$ on pisteessä (a,b) suunnatut derivaatat

$$\mathrm{grad}_u f(a,b)=3\sqrt{2},$$
$$\mathrm{grad}_v f(a,b)=5,$$

jossa suunnat *u* ja *v* ovat

$$\hat{u}=(\hat{\imath}+\hat{\jmath})/\sqrt{2},\quad \hat{v}=(3\hat{\imath}-4\hat{\jmath})/5.$$

Määritä $\nabla f(a,b)$.

FYSA114 ExT4

$\boxed{1}$ a.) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

$\nabla f(x,y) = 2x\hat{i} - 2y\hat{j}$, $\nabla f(2,-1) = 4\hat{i} + 2\hat{j}$

b.) $f(x,y,z) = xy^2z^3$

$\nabla f(x,y,z) = y^2z^3\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + 3xy^2z^2\hat{k}$

$\nabla f(3,-1,2) = 1\cdot 2^3\hat{i} + 2\cdot 3\cdot(-1)\cdot 2^3\hat{j} + 3\cdot 3\cdot 1\cdot 2^2\hat{k}$

$= 8\hat{i} - 48\hat{j} + 36\hat{k}$

c.) $f(x,y,z) = \sin x \cos y \tan z$

$\nabla f(x,y,z) = \cos x \cos y \tan z\,\hat{i} - \sin x \sin y \tan z\,\hat{j} + \frac{\sin x \cos y}{\cos^2 z}\hat{k}$

$\nabla f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\,\hat{i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\,\hat{j} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{1}{2})^2}\hat{k}$

$= \frac{3}{2\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\hat{k}$

FYSA114 ExT4

$\boxed{2.}$ $f(x,y) = x^2 y$

a.) $\nabla f = 2xy\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$

b.) Lasketaan $D_{\vec{u}} f$ kun $\vec{u} = \frac{4}{5}\hat{\imath} - \frac{3}{5}\hat{\jmath}$, $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$

$\Rightarrow \vec{u} = \hat{u}$

$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \hat{u} = (2xy\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}) \cdot \frac{1}{5}(4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$

$= \frac{8}{5}xy - \frac{3}{5}x^2$

$D_{\vec{u}} f(1,2) = \frac{8}{5} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{3}{5} \cdot 1^2 = \frac{16}{5} - \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

c.) Funktio kasvaa suurimmalla nopeudella gradientin suuntaan, joka on $\nabla f(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2\hat{\imath} + 1^2\hat{\jmath} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$

Perustelu:

Halutaan siis suunnatun derivaatan $D_{\hat{u}} f$ maksimi

$D_{\hat{u}} f = \nabla f \cdot \hat{u} = |\nabla f| \cdot \underbrace{|\hat{u}|}_{=1} \cos\phi$, missä ϕ on

∇f:n ja $\hat{u}$:n välinen kulma.

Maksimi saavutetaan kun $\phi = 0$ eli $\hat{u}$ on saman suuntainen kuin ∇f.

FYSA114 ExT4

$\boxed{3.}$

Tiedetään

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = 3\sqrt{2} = \nabla f(a,b) \cdot \hat{u} \quad , \quad \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

$$D_{\vec{v}} f(a,b) = 5 = \nabla f(a,b) \cdot \hat{v} \quad , \quad \hat{v} = \frac{3}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{5}\hat{\jmath}$$

Merkitään $\nabla f(a,b) = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath}$

$$\nabla f(a,b) \cdot \hat{u} = (A\hat{\imath} + B\hat{\jmath}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = \frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A + B = 6$$

$$\nabla f(a,b) \cdot \hat{v} = (A\hat{\imath} + B\hat{\jmath}) \cdot \frac{1}{5}(3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) = \frac{3}{5}A - \frac{4}{5}B = 5$$

$$\Rightarrow 3A - 4B = 25$$

Saatiin yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + B = 6 \\ 3A - 4B = 25 \end{cases} \quad \Rightarrow B = 6 - A$$

$$\Rightarrow 3A - 4(6-A) = 3A - 24 + 4A = 25$$

$$7A = 49$$

$$A = 7 \quad \Rightarrow B = 6 - 7 = -1$$

Eli $\underline{\underline{\nabla f(a,b) = 7\hat{\imath} - \hat{\jmath}}}$