Vektorianalyysi

k. 2014

Ex Tempore 5

Ma 24.3.

1. Laske seuraavien vektoreiden roottorit $\nabla \times \vec{F}$:
   a. $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$
   b. $\vec{F} = (\sin y)\hat{i} + (\sin z)\hat{j} + (\sin x)\hat{k}$
2. Olkoon $\vec{F} = 2x\hat{i} + y\hat{j} - 3z\hat{k}$.
   a. Osoita, että $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
   b. Etsi sellainen vektori $\vec{G}$, että $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$.
3. Olkoon $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$. Laske $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$.
4. Osoita, että gravitaatiovoima

$$\vec{F} = \frac{-Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

   on pyörteetön.

FYSA114 ExT5

$\boxed{1.}$ Laske $\nabla \times \vec{F}$.

a.) $\vec{F} = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-y) - \hat{\jmath}(z-0) + \hat{k}(0-x)$$

$$= -y\hat{\imath} - z\hat{\jmath} - x\hat{k}$$

b.) $\vec{F} = \sin y\,\hat{\imath} + \sin z\,\hat{\jmath} + \sin x\,\hat{k}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin y & \sin z & \sin x \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0 - \cos z) - \hat{\jmath}(\cos x - 0) + \hat{k}(0 - \cos y)$$

$$= -\cos z\,\hat{\imath} - \cos x\,\hat{\jmath} - \cos y\,\hat{k}$$

$\boxed{2.}$ a.) $\vec{F} = 2x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} - 3z\hat{k}$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$
$$= 2 + 1 - 3 = 0$$

FYSA114

$\boxed{2}$. b) Etsitään $\vec{G}$ jolle $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$

$$\nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(\partial_y G_z - \partial_z G_y) - \hat{\jmath}(\partial_x G_z - \partial_z G_x) + \hat{k}(\partial_x G_y - \partial_y G_x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_y G_z - \partial_z G_y = 2x \\ \partial_z G_x - \partial_x G_z = y \\ \partial_x G_y - \partial_y G_x = -3z \end{cases}$$

Yritetään ensin löytää mahdollisimman yksinkertainen ratkaisu sopivilla valinnoilla. Jos ei onnistu, niin valitaan jotain toisin.

Valinta 1: $G_z = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\partial_z G_y = 2x \\ \partial_z G_x = y \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} G_y &= -2xz + C(x,y) \\ G_x &= yz + D(x,y) \end{aligned}$$

$$\partial_x G_y - \partial_y G_x = -2z + \partial_x C(x,y) - z - \partial_y D(x,y)$$

Valinta 2: $C(x,y) = D(x,y) = 0$

$$\Rightarrow \partial_x G_y - \partial_y G_x = -3z$$ eli kaikki ok!

$$\Rightarrow \vec{G} = yz\hat{\imath} - 2xz\hat{\jmath}$$

<u>Huom.</u> Tulokseen voidaan lisätä mielivaltainen konservatiivinen vektorikenttä ja tulos ei muutu.

$$\nabla \times (\vec{G} + \nabla\phi) = \nabla \times \vec{G} + \underbrace{\nabla \times \nabla\phi}_{=0} = \nabla \times \vec{G} = \vec{F}.$$

FYSA114 EXT5

$\boxed{3.}$ Olk. $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z\hat{k}$.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$\boxed{4.}$ $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

Gm_1m_2 voidaan jättää pois, sillä se on vakio eikä vaikuta derivointioperaatioissa.

$$\vec{F} = -\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Jos $\vec{F}$ on pyörteetön niin löytyy potentiaalifunktio ϕ s.e. $\nabla\phi = \vec{F}$

$$\partial_x \phi = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \phi = -\int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C(y,z)$$

$$\partial_y \phi = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \partial_y C(y,z)$$

$$\Rightarrow C(y,z) = D(z) \quad \Rightarrow \phi = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + D(z)$$

$$\partial_z \phi = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \partial_z D(z) \Rightarrow D(z) = E \in \mathbb{R}$$

Eli löydettiin potentiaalifunktio $\phi = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + E$

$\Rightarrow \vec{F}$ on pyörteetön.