Vektorianalyysi

k. 2014

Ex Tempore 6

Ke 26.3.

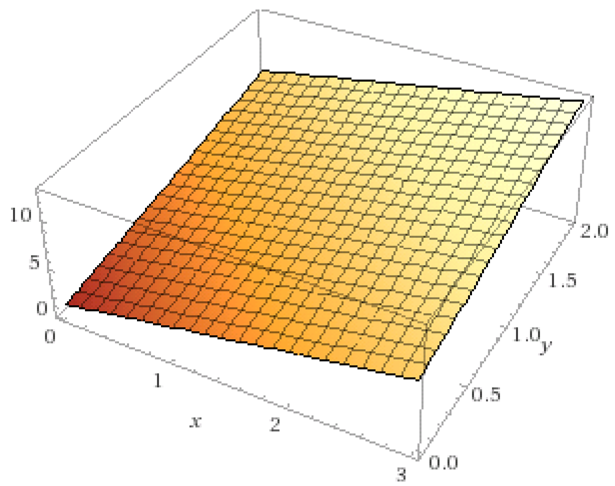
1. Olkoon S xy-tason alue, jota rajaavat suorat

$$x-2y=0,\quad x-2y=-4,$$
$$x+y=4,\quad x+y=1.$$

Tee sellainen muuttujanvaihto, jossa integroimisalueeksi tulee suorakaide. Laske muunnoksen Jacobin determinantti.

2. Laske integraali $\iint_S dS\ 9x$, kun alueena on tehtävän 1 alue.

3. Laske $\iint_S dS\ x^2yz$, kun S on se osa pintaa $z=1+2x+3y$, joka on xy-tason suorakaiteen $[0,3]\times[0,2]$ yläpuolella.

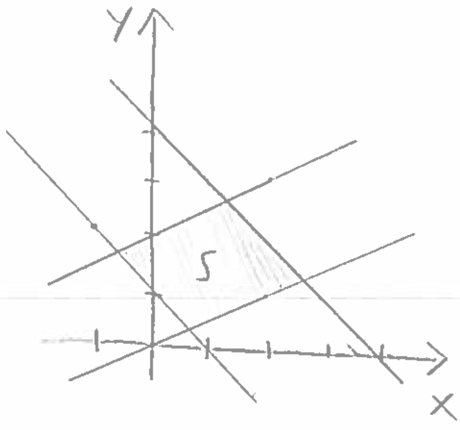


FYSA114 ExT6

$\boxed{1.}$ Aluetta S rajaavat suorat:

$x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$

$x + y = 4$, $x + y = 1$



Nyt muuttuja $u = x - 2y$ on välillä $[-4, 0]$ ja muuttuja $v = x + y$ puolestaan välillä $[1, 4]$.

Lasketaan tämän muuttujanvaihdon Jacobin determinantti:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Tarvitaan $x(u,v)$ ja $y(u,v)$

$u = x - 2y$ $\Rightarrow$ $u - v = x - 2y - x - y = -3y$

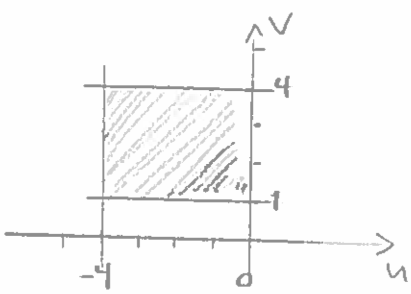
$v = x + y$ $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{3}(v - u) = \frac{1}{3}v - \frac{1}{3}u$

$x = u + 2y = u + \frac{2v}{3} - \frac{2u}{3}$

$= \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}u$

$$\Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

Haluttu alue (u,v)-koordinaatistossa on



FYSA114 ExT 6

$\boxed{2.}$ Lasketaan $\int_S ds\, 9x$ kun S on edellisen tehtävän alue.

$$\int_S dx dy\, 9x = \int_S du dv\, |J|\, 9x(u,v)$$

↑ Jacobin determinantin itseisarvo tulee muuttujanvaihdosta

$$= 9 \int_{-4}^{0} du \int_{1}^{4} dv\, \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3}(2v+u) = \int_{-4}^{0} du \int_{1}^{4} dv\, (2v+u)$$

↑ Integrointijärjestyksellä ei ole väliä kunhan rajat on määritelty oikein.

Integroinnissa muuttujat ovat toistensa suhteen riippumattomia.

$$= \int_{-4}^{0} du \Big/_{1}^{4} v^2 + uv = \int_{-4}^{0} du \underbrace{(16 + 4u - 1 - u)}_{= 15 + 3u} = \Big/_{-4}^{0} 15u + \tfrac{3}{2}u^2$$

$$= 15 \cdot 4 - \tfrac{3}{2} \cdot 16 = 60 - 24 = 36$$

FYSA114 ExT6

$\boxed{3.}$ Lasketaan $\int_S ds\, x^2yz$ kun

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\in[0,3],\ y\in[0,2],\ z = 1+2x+3y\}$$

Yleisessä tapauksessa skalaarikentän pintaintegraali lasketaan

$$\int_S ds\, f(\vec r) = \int_{S_{uv}} ds_{uv}\, f(\vec r(u,v)) \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v}\right| ,$$

missä $\vec r = \vec r(u,v)$ on pinnan parametriesitys.

Parametrisoidaan pinta:

$$\begin{aligned} x &= u, \quad u\in[0,3] \\ y &= v, \quad v\in[0,2] \\ z &= 1+2u+3v \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec r(u,v) = u\hat\imath + v\hat\jmath + \underbrace{(1+2u+3v)}_{f(u,v)}\hat k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec r}{\partial u} &= \hat\imath + \frac{\partial f}{\partial u}\hat k \\ \frac{\partial \vec r}{\partial v} &= \hat\jmath + \frac{\partial f}{\partial v}\hat k \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat\imath & \hat\jmath & \hat k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\hat\imath - \frac{\partial f}{\partial v}\hat\jmath + \hat k$$

$$\left|\frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} = \sqrt{2^2+3^2+1} = \sqrt{14}$$

Nyt voidaan laskea:

$$\int_S ds\, x^2yz = \int_0^3 du \int_0^2 dv\, u^2v(1+2u+3v)\sqrt{14} = \sqrt{14}\int_0^3 du \int_0^2 dv\,(u^2v + 2u^3v + 3u^2v^2)$$

$$= \sqrt{14}\int_0^3 du \Big/_0^2 \tfrac{1}{2}u^2v^2 + u^3v^2 + u^2v^3 = \sqrt{14}\int_0^3 du\,(2u^2 + 4u^3 + 8u^2)$$

$$= \sqrt{14}\Big/_0^3 \tfrac{10}{3}u^3 + u^4 = \sqrt{14}\,(10\cdot 9 + 81) = \underline{\underline{171\sqrt{14}}}$$