Vektorianalyysi
k. 2014

Ex Tempore 8
Ke 2.4.

1. Laske sylinterikoordinaatistossa ∇u ja $\nabla \cdot \vec{v}$, kun

   a) $u = r, \quad \vec{v} = r\hat{r} + z\hat{z}$

   b) $u = z^3 r, \quad \vec{v} = \hat{\phi}$

2. Pisteen pallokoordinaatit ovat (r, θ, ϕ), jolloin pisteen paikkavektori on

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\hat{j} + r\cos\theta\hat{k}.$$

   Esitä pallokoordinaatiston tähän pisteeseen piirretyt kantavektorit $\hat{r}, \hat{\theta}$ ja $\hat{\phi}$ yksikkövektoreiden $\hat{i}$, $\hat{j}$ ja $\hat{k}$ avulla lausuttuina. Laske myös skaalaustekijät h_r, h_θ ja h_ϕ.

3. Laske pallokoordinaatistossa ∇u ja $\nabla \cdot \vec{v}$, kun

   a) $u = \sin\theta, \quad \vec{v} = r\hat{\theta}$

   b) $u = r^2 \sin\phi, \quad \vec{v} = \hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi}$

FYSA114 ExT8

$\boxed{1.}$ Sylinterikoordinaatistossa:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

a.) $u = r \Rightarrow \nabla u = \hat{r}$

$\vec{v} = r\hat{r} + z\hat{k} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) + 0\right) + 1 = 2+1 = 3$

b.) $u = z^3 r \Rightarrow \nabla u = z^3\hat{r} + 3z^2 r\hat{k}$

$\vec{v} = \hat{\phi} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$

Huom. Yleisessä käyräviivaisessa koordinaatistossa

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w V_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w V_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v V_w)\right)$$

josta saadaan sylinterikoordinaatiston tulokset kun asetetaan $u=r$, $v=\phi$ ja $w=z$. Skaalauskertoimet ovat $h_r = 1$, $h_\phi = r$, $h_z = 1$.

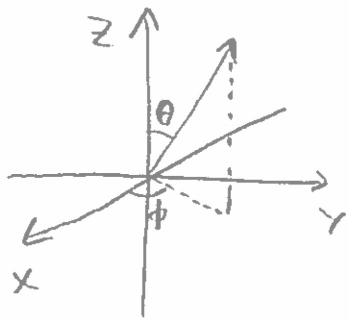
FYSA114 ExT8

$\boxed{2.}$ Tehtävän ratkaisu löytyy viidennen harjoituksen toisesta tehtävästä.

FYSA114 ExT 8

$\boxed{3.}$ Pallokoordinaatistossa :

$h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r\sin\theta$



$$\Rightarrow \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, V_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$

a.) $u = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \nabla u = \frac{\cos\theta}{r}\hat{\theta}$

$\vec{V} = r\hat{\theta} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot r\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

b.) $u = r^2\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \nabla u = 2r\sin\phi\,\hat{r} + \frac{r^2\cos\phi}{r\sin\theta}\hat{\phi}$

$$= 2r\sin\phi\,\hat{r} + \frac{r\cos\phi}{\sin\theta}\hat{\phi}$$

$\vec{V} = \hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta$

$$= \frac{2}{r} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}$$