Vektorianalyysi
k. 2014

Ex Tempore 9
Ma 7.4.

1. Laske vektorin $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ vuo yli pallopinnan

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

2. Tarkastellaan sitä osaa pinnasta $z = x^2 + y^2$, joka on neliön $-1 \le x \le 1$ ja $-1 \le y \le 1$ yläpuolella.

a) Kirjoita pinnan pinta-alkiovektorin $d\vec{S}$ lauseke.

b) Laske vektorin $\vec{u} = z\hat{i} + x^2\hat{k}$ vuo tämän pinnan läpi.

3. Pinta S on annettu parametrimuodossa seuraavasti:

$$\vec{r} = u\cos v\hat{i} + u\sin v\hat{j} + u^2\hat{k} \qquad (0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi).$$

a) Osoittaako vektori $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ pinnan positiiviselle vai negatiiviselle puolelle?

b) Kirjoita pinnan negatiivisella puolella oleva pinta-alkiovektori $d\vec{S}$.

c) Laske vektorin

$$\vec{F} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j}}{x^2 + y^2} + \hat{k}$$

vuo pinnan läpi pinnan positiiviselta puolelta negatiiviselle puolelle.

FYSA114 ExT 9

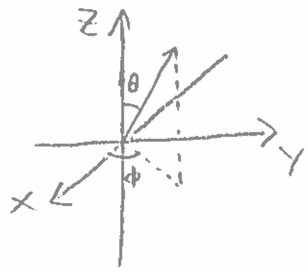
$\boxed{1.}$ $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = \vec{r}$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = a^2\}$

Lasketaan vektorikentän vuo yli pallopinnan S, eli $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{s}$. Tämä voidaan laskea kahdella tavalla:

1° Etsitään $d\vec{s}$ pinnan parametriesityksestä

2° Etsitään $d\vec{s} = \hat{N}\, ds$, missä $\hat{N}$ on pinnan normaalivektori ja ds pinta-alkion pinta-ala.

Käytetään menetelmää 2.



$ds = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

↑ Saatiin kurssilla aiemmin esitetyistä pintaintegraaleista.

Pallokuorelle $\hat{N} \uparrow\uparrow \vec{r} \Rightarrow \hat{N} = \frac{\vec{r}}{a}$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{a}\cdot a^2 \sin\theta = 2\pi a^3 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = \underline{4\pi a^3}$$

FYSA114 ExT9

$\boxed{2.}$ a.) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in [-1,1]^2, z = x^2+y^2\}$

Parametrisoidaan pinta $\vec{r}(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + (x^2+y^2)\hat{k}$, $(x,y) \in [-1,1]^2$

Nyt saadaan:

$$d\vec{s} = d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv$$

Asetetaan $u = x$ ja $v = y$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{\imath} + 2x\hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{\jmath} + 2y\hat{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = -2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{s} = (-2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + \hat{k})dxdy$$

b.) Lasketaan $\int_S \vec{u} \cdot d\vec{s}$ kun $\vec{u} = z\hat{\imath} + x^2\hat{k}$

$$\Rightarrow \int_S \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} dx \left((x^2+y^2)\hat{\imath} + x^2\hat{k}\right) \cdot (-2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + \hat{k})$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} dx \, (\underbrace{-2x^3}_{\text{pariton}} \underbrace{-2y^2x}_{\text{pariton}} + x^2) = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} dx \, x^2$$

$$= 2 \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

FYSA114 ExT 9

$\boxed{3.}$ a.) Olk. pinnan parametriesitys:

$$S: \vec{r}(u,v) = u\cos v\,\hat{\imath} + u\sin v\,\hat{\jmath} + u^2\hat{k}, \quad u \in [0,1], \quad v \in [0,2\pi]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \cos v\,\hat{\imath} + \sin v\,\hat{\jmath} + 2u\hat{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -u\sin v\,\hat{\imath} + u\cos v\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -2u^2\cos v\,\hat{\imath} - 2u^2\sin v\,\hat{\jmath} + \underbrace{(u\cos^2 v + u\sin^2 v)}_{=u}\hat{k}$$

z-komponentti on positiivinen, joteen $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ osoittaa positiiviselle puolelle.

b.) $$d\vec{S} = (2u^2\cos v\,\hat{\imath} + 2u^2\sin v\,\hat{\jmath} - u\hat{k})\,du\,dv$$

c.) $$\vec{F} = \frac{2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}}{x^2+y^2} + \hat{k} = \frac{2\cos v\,\hat{\imath} + 2\sin v\,\hat{\jmath}}{u} + \hat{k}$$

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \left[\frac{2}{u}(\cos v\,\hat{\imath} + \sin v\,\hat{\jmath}) + \hat{k}\right]\cdot(2u^2\cos v\,\hat{\imath} + 2u^2\sin v\,\hat{\jmath} - u\hat{k})$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\,(4u\cos^2 v + 4u\sin^2 v - u) = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\,(3u)$$

$$= 6\pi \int_0^1 du\, u = 6\pi \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}u^2 = 3\pi$$