Vektorianalyysi

k. 2014

Harjoitus 3

Käsitellään ke 26.3.

1. Laske voiman $\vec{F}(r) = (x + yz)\hat{i} + (y + xz)\hat{j} + (z + xy)\hat{k}$ tekemä työ $W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}$, kun se liikuttaa kappaletta origosta O = (0,0,0) pisteeseen P= (1,1,1)
    a. suoraa viivaa OP pitkin
    b. käyrää $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$ pitkin
    c. murtoviivaa AO, AB, BP pitkin, kun A = (1,0,0), ja B = (1,1,0).
    d. Laske $\nabla \times \vec{F}$. Minkä kohtia a-c koskevan johtopäätöksen voit siitä vetää?
2. Tämä tehtävä koskee paikkavektoria $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.
    a. Laske $\nabla r, \quad \nabla \cdot \vec{r}, \quad \nabla \times \vec{r}$.
    b. Osoita, että $\nabla f(r) = f'(r)\hat{r}$ ja $\nabla^2 f(r) = \nabla \cdot (\nabla f(r)) = f''(r) + 2\dfrac{f'(r)}{r}$.
    c. Laske $\nabla \dfrac{1}{r}$ ja $\nabla^2 \dfrac{1}{r}$.
3. Muurahainen liikkuu (x, y)-tasolla, jonka lämpötila on jakautunut funktion $T(x, y) = x^2 - 2y^2$ (astetta) mukaisesti.
    a. Hahmottele lämpötilan tasa-arvokäyrät (sopiva määrä niitä) eli isotermit.
    b. Muurahainen on pisteessä (2,-1). Mihin suuntaan sen tulisi lähteä, jos se haluaisi viilennystä mahdollisimman nopeasti?
    c. Jos muurahainen liikkuu tähän suuntaan nopeudella k (matkayks./aikayks.), kuinka monta astetta aikayksikössä lämpötila muuttuu?
    d. Mitä käyrää pitkin muurahaisen tulisi kulkea, jotta lämpötila alenisi koko ajan mahdollisimman paljon. (Adams 12.7, teht. 21).
4. Johda pintojen $x + y + z = 6$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ leikkauskäyrän tangenttivektorin lauseke pisteessä (1,2,3). (Adams 12.7, teht 27)
5. Laske seuraavien vektoreiden divergenssi ja roottori:
    a. $xy\hat{i} + (z^2 - 2y)\hat{j} + \cos yz\hat{k}$
    b. $e^{yz}\hat{i} + e^{xz}\hat{j} + e^{xy}\hat{k}$
    c. $\dfrac{x}{y}\hat{i} + \dfrac{y}{z}\hat{j} + \dfrac{z}{x}\hat{k}$
6. Osoita oikeiksi seuraavat nablailutulokset:
    a. $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$
    b. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
    c. $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
    d. $\nabla \times (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \times \vec{A} + \phi (\nabla \times \vec{A})$