Vektorianalyysi
k. 2014

Harjoitus 5

Käsitellään ke 9.4.

1. Mitä geometrisia objekteja *xyz*-avaruudessa vastaavat ne pisteet, joiden pallokoordinaateille pätee
   a) $r=$ vakio, b) $\phi=$ vakio, c) $\theta=$ vakio, d) $r=$ vakio ja $\phi=$ vakio,
   e) $r=$ vakio ja $\theta=$ vakio, f) $\phi=$ vakio ja $\theta=$ vakio,
   g) $r=$ vakio, $\phi=$ vakio ja $\theta=$ vakio?

2. Tarkastellaan avaruuden pistettä *P*, jonka koordinaatit ovat $(x,y,z)=(1,1,1)$. Mitkä ovat tähän pisteeseen asetettujen paikallisten sylinteri- ja pallokoordinaatistojen kantavektorit $\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{z}$ ja $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi}$ *xyz*-koordinaatiston kantavektoreiden $\hat{i}$, $\hat{j}$ ja $\hat{k}$ avulla lausuttuina?

3. Johda napakoordinaatistossa skalaarifunktion $u(r,\theta)$ gradientti ja vektorifunktion $\vec{v}=v_r(r,\theta)\hat{r}+v_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$ divergenssi $\nabla\cdot\vec{v}$.

4. Osoita, että sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla^2 u(r,\phi,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

   lähtemällä Laplacen operaattorin karteesisesta lausekkeesta $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

   ja soveltamalla derivoinnin ketjusääntöä.

5. Johda vektorikentän $\vec{F}=F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_\phi\hat{\phi}$ divergenssi $\nabla\cdot\vec{F}$ pallokoordinaatistossa eli

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta)+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

   osittaisderivointia käyttäen lähtemällä muodosta (ks. luennot s. 66)

$$\nabla\cdot\vec{F}=(\hat{i}\partial_x+\hat{j}\partial_y+\hat{k}\partial_z)\cdot(F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_\phi\hat{\phi}).$$