

## Vektorianalyysi

k. 2014

### Harjoitus 6

Käsitellään ke 23.4.

1. Olkoon  $V$  alue, jota rajoittavat tasot  $x = 0$ ,  $y = 0$  ja  $z = 2$  sekä pinta  $z = x^2 + y^2$  ja jossa  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ . Laske funktion  $f(x, y, z) = x$  tilavuusintegraali tämän alueen yli. Tämä laskettiin luennolla (ks. s. 73) suorittamalla ensimmäiseksi  $z$ -integraali. Laske integraali nyt niin, että integroit ensin  $x$ :n yli.

2. Tarkastellaan kappaletta

$$S = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\}.$$

- a) Laske kappaleen tilavuus.
  - b) Laske kappaleen massa, kun tiheys on  $\rho(x, y, z) = x + 2y + 4z$  ( $\text{kg/m}^3$ ).
3. Tarkastellaan  $a$ -säteistä origokeskistä palloa. Pallon tiheys on suoraan verrannollinen pallon keskipisteestä mitattuun etäisyyteen, ts.  $\rho(\vec{r}) = \alpha r$ , jossa  $\alpha$  on vakio. Laske pallon massa

$$M = \iiint_S \rho(\vec{r}) dV.$$

4. Kun kappaleen tiheysjakautuma  $\rho(\vec{r})$  tunnetaan, saadaan kappaleen painopisteen paikkavektori  $\vec{r}_{CM}$  laskettua kaavasta (käy perustelu läpi Adamsin luvusta 14.7)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\iiint_{\text{kappale}} \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\iiint_{\text{kappale}} \rho(\vec{r}) dV}.$$

Laske origokeskisen  $a$ -säteisen pallon oktantissa  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  olevan osan painopisteen paikka. Pallon tiheys oletetaan vakioksi.

5. Ympyräkartio, jonka korkeus on  $h$  ja kärkikulma  $\alpha$ , sijaitsee kuvan mukaisesti kärki origossa ja akselina  $z$ -akseli. Kartion tiheys on  $\rho$  ja massa  $M$ . Laske kartion aiheuttama gravitaatiovoima origossa sijaitsevaan pistemäiseen kappaleeseen, jonka massa on  $m$ . Newtonin painovoimateorian mukaan  $M$ -massaisen kappaleen aiheuttama voima  $m$ -massaiseen kappaleeseen on

$$\vec{F} = G \frac{mM}{d^2} \hat{e},$$

jossa  $d$  on kappaleiden painopisteiden välinen etäisyys ja  $\hat{e}$  on kappaleiden painopisteiden yhdysjanan suuntainen yksikkövektori massasta  $m$  massaan  $M$ .

Ohje: Laske pisteessä  $\vec{r}$  olevan massa-alkion  $dM = \rho(\vec{r})dV$  aiheuttama voima Newtonin kaavaa käyttäen ja integroi yli kartion. Integrointi kannattanee suorittaa käyttäen sylinteri- tai pallokoordinaatistoa (tai molempia - emme kiellä!).

