Vektorianalyysi
k. 2014

Harjoitus 7

Käsitellään ma 5.5.

1. a) Osoita, että kappaleen tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{r}\cdot\hat{N}dS,$$

jossa $\vec{r}$ on paikkavektori ja S on kappaleen pinta.

b) Osoita Gaussin lain perusteella, että

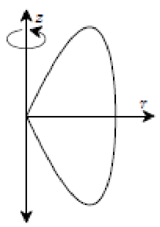
$$\iiint_D \nabla\phi dV = \oiint_S \phi\hat{N}dS.$$

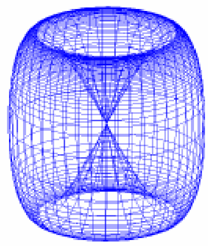
Vihje: Sovella Gaussia vektorikenttään $\vec{F} = \phi\vec{c}$, jossa $\vec{c}$ on mielivaltainen vakiovektori.

2. Laske pintaintegraali $\oiint_D (2xy\hat{i} + 3y\hat{j} + 2z\hat{k})\cdot d\vec{S}$, jossa D on koordinaattitasojen $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$ ja tason $x + y + z = 1$ rajoittama alue.

(Vastaus: 11/12.)

3. Tarkastellaan käyrän





$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \cos u,$$

$$z = \sin 2u, \qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}.$$

muodostamaa pyörähdyskappaletta eli kappaletta, joka syntyy, kun käyrä pyörähtää z-akselin ympäri.

Laske kappaleen tilavuus

$$V = \iiint_{\text{kappale}} dV$$

Gaussin lain avulla.

Vihjeitä: Huomaa, että yksinkertaisin valinta vektorikentäksi on $\vec{F} = z\hat{k}$.
Pintaintegraalin laskemiseksi anna pinnalle parametriesitys, jossa

parametreina ovat u ja pyörähdyskulma θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Esitä pintaintegraalissa esiintyvä pinta-alkio dS suureen $dud\theta$ avulla.
(Vastaus: $\pi^2/2$.)

4. Tarkastellaan yksikköpalloa $x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$ Laske Gaussin lausetta hyväksi käyttäen tilavuusintegraali

$$I = \iiint_D z^2 dV.$$

Ohje: Taaskin kannattaa valita vektorikentäksi $\vec{F}$ yksinkertaisin vaihtoehto.
(Vastaus: $4\pi/15.$)

5. Olkoon vektorikenttä

$$\vec{F} = (z-2y)\hat{i} + (3x-4y)\hat{j} + (z+3y)\hat{k}.$$

Laske Stokesin teoreeman avulla käyräintegraali

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kun käyrä C on

a) tasossa $z = 2$ oleva yksikköympyrä,

b) sellaisen kolmion reuna, jonka kärjet ovat pisteissä (1,0,0), (0,1,0) ja (0,0,1).

(Vastaukset 5π tai -5π ja $9/2$ tai -9/2 .)

6. Laske vektorikentän

$$\vec{F} = (e^x - y^3)\hat{i} + (e^y + x^3)\hat{j} + e^z\hat{k}$$

käyräintegraali pitkin käyrää

$$\vec{r} = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + \sin 2t\,\hat{k} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Vihje: Stokes-hommia. Huomaa, että käyrä on tasossa $z = 2xy$ trigonometrian tutun kaavan mukaan.
(Vastaus: $3\pi/2$ tai -$3\pi/2.$)