Vektorianalyysi

k. 2014

Harjoitus 1

Käsitellään ke 12.3.

1. Tason $x+y+z=1$ ja sylinterin $z=x^2$ leikkaus on paraabeli. Kirjoita tämän paraabelin parametriesitys käyttämällä parametrina koordinaattia *x*.
2. Laske parametrisoidun käyrän $\vec{r}=t^2\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k},\quad 0\le t\le 1$ pituus.
3. Laske seuraavat viivaintegraalit:
   a. $\int_C (x+y)ds, \quad \vec{r}=at\vec{i}+bt\vec{j}+ct\vec{k},\quad 0\le t\le m.$
   b. $\int_C yds, \quad \vec{r}=t^2\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k},\quad m\ge t\ge 0.$ Tässä suunnistetun käyrän alkupisteenä on $t=m$. Miten tulos muuttuu, jos valitset käyrälle vastakkaisen suunnistuksen eli otat alkupisteeksi $t=0$?
4. Laske seuraava viivaintegraali, kun käyränä on nelikulmion reuna, jonka kulmat ovat pisteissä (0,0), (1,0), (1,1) ja (0,1), ja kierto tapahtuu vastapäivään:
$$\oint (x^2y^2dx+x^3ydy).$$
5. Laske vektorikentän $\vec{F}=(x^2\,y, y^2)$ viivaintegraali $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s}$, kun *C* on paraabelin $y=x^2$ kaari pisteestä (0,0) pisteeseen (1,1).
6. Laske muotoon $\vec{r}=3t\vec{i}+3t^2\vec{j}+2t^3\vec{k},\quad 0\le t\le 1$, väännetyn metallilangan massa, kun sen (joissain yksiköissä mitattu) massa on (jotain) pituuden yksikköä kohti pisteessä $\vec{r}(t)$ on $1+t$.

FYSA114 Demo 1

$\boxed{1.}$ Halutaan tason $x+y+z=1$ ja sylinterin $z=x^2$ leikkauskäyrän parametriesitys.

Valitaan $x=t \Rightarrow z=t^2$.

y saadaan yhdistämällä yhtälöt:

$y = 1 - x - z = 1 - t - t^2$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = t\hat{i} + (1-t-t^2)\hat{j} + t^2\hat{k}$$

FYSA114 Demo1

$\boxed{2.}$ Laskétaan käyrän $c: \vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$, $t \in [0,1]$ pituus.

$$l = \int_C ds = \int_0^1 \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt \quad , \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2 + 4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{8+9t^2}$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{8+9t^2}\, dt$$

$$= \Big/_{0}^{1} (8+9t^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{27}\left((8+9)^{3/2} - 8^{3/2}\right) = \frac{1}{27}\left(17\sqrt{17} - 8\sqrt{8}\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}\right)$$

FYSA114 Demo 1

$\boxed{3.}$ a.) $C: \vec{r}(t) = \underbrace{at}_{x(t)}\hat{\imath} + \underbrace{bt}_{y(t)}\hat{\jmath} + \underbrace{ct}_{z(t)}\hat{k}$, $t \in [0, m]$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}, \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\int_C (x+y)\,ds = \int_0^m (at+bt)\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Big/_0^m \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{2}t^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(am^2+bm^2)$$

b.) Huom. Tehtävänannossa on virhe suunnistukseen liittyen. Lasketaan integraali oikein molempiin suuntiin.

1° Polku $C: \vec{r}(t) = t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t^2\hat{k}$, $t \in [0, m]$

Tämän polun lähtöpiste on $\vec{r}(0) = 0$ ja loppupiste $\vec{r}(m) = m^2\hat{\imath} + m\hat{\jmath} + m^2\hat{k}$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2t\hat{k}, \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2+1+4t^2}$$

$$\int_C y\,ds = \int_0^m t\sqrt{1+8t^2}\,dt = \Big/_0^m (1+8t^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{24}\left((1+8m^2)^{3/2} - 1\right)$$

FYSA114 Demo1

$\boxed{3.}$ ...jatkuu

2° Tarkastellaan nyt C:n vastapolkua

$\overleftarrow{C}: \vec{r}(t) = (m-t)^2\hat{\imath} + (m-t)\hat{\jmath} + (m-t)^2\hat{k}$, $t \in [0,m]$

Lähtöpiste: $\vec{r}(0) = m^2\hat{\imath} + m\hat{\jmath} + m^2\hat{k}$

Loppupiste: $\vec{r}(m) = 0$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2(m-t)\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2(m-t)\hat{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{4(m-t)^2 + 1 + 4(m-t)^2}$$

$$\int_{\overleftarrow{C}} y\,ds = \int_0^m (m-t)\sqrt{1+8(m-t)^2}\,dt \qquad \text{mv. } \begin{array}{l} m-t=u \\ du = -dt \end{array}$$

$$= -\int_m^0 u\sqrt{1+8u^2}\,du = \int_0^m u\sqrt{1+8u^2}\,du = \frac{1}{24}\left((1+8m^2)^{3/2} - 1\right)$$

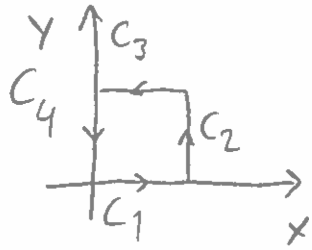
Sama integraali kuin aiemmin.

$\Rightarrow$ Tulos ei riipu polun integrointisuunnasta. Lisäksi integrointirajojen vaihto ei vastaa polun suunnan muutosta.

FYSA114 Demo 1

$\boxed{4.}$ Lasketaan $\oint_C (\underbrace{x^2y^2}_{F_x}dx + \underbrace{x^3y}_{F_y}dy)$ kun

$C: \ (0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (0,1) \to (0,0)$



Integroitava vektorikenttä on:

$$\vec{F}(\vec{r}) = x^2y^2\hat{\imath} + x^3y\hat{\jmath}$$

Lasketaan:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Jaetaan integraali osiin.

Integraali antaa 0 käyrillä C_1 ja C_4, sillä $\vec{F}(\vec{r})$ on tällöin 0.

Parametrisoidaan käyrät C_2 ja C_3:

$C_2: \ \vec{r}_2(t) = \hat{\imath} + t\hat{\jmath}, \ t \in [0,1] \qquad \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \hat{\jmath}$

$C_3: \ \vec{r}_3(t) = (1-t)\hat{\imath} + \hat{\jmath}, \ t \in [0,1] \qquad \frac{d\vec{r}_3}{dt} = -\hat{\imath}$

Lasketaan integraalit:

$$\int_{C_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (1^2\cdot t^2\hat{\imath} + 1^3\cdot t\hat{\jmath})\cdot\hat{\jmath}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}t^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_{C_3} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left((1-t)^2\cdot 1^2\hat{\imath} + (1-t)^3\cdot 1\hat{\jmath}\right)\cdot(-\hat{\imath})\,dt = -\int_0^1 (1-2t+t^2)\,dt$$

FYSA114 Demo 1

$\boxed{4.}$ ... jatkuu

$$\int_{C_3} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_0^1 (1 - 2t + t^2)\, dt = - \Big/_0^1 t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

$$= -\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

FYSA114 Demo1

$\boxed{5.}$ $\vec{F}(\vec{r}) = (x^2 y, y^2) = x^2 y \hat{\imath} + y^2 \hat{\jmath}$

$C: \; y = x^2 \;, \; (0,0) \to (1,1)$

Parametrisoidaan käyrä:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} \;, \quad t \in [0,1]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2t\hat{\jmath}$$

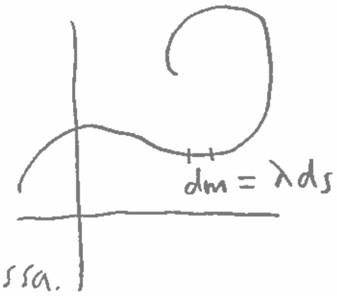
$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt = \int_0^1 (t^2 \cdot t^2 \hat{\imath} + t^4 \hat{\jmath}) \cdot (\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath}) \, dt$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 2t^5) \, dt = \Big/_0^1 \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^6 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

FYSA114 Demo 1

$\boxed{6.}$ $C: \vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath} + 2t^3\hat{k}, \quad t \in [0,1]$

$\lambda(t) = 1 + t$ = pituustiheys



$$M = \underbrace{\int_C dm}_{\text{Kokonaismassa on pienten metallilangan palojen massojen summa.}} = \int_C \underbrace{\lambda(t)\, ds}_{ds\text{-pituisen palan massa.}}$$

Kokonaismassa on pienten metallilangan palojen massojen summa.

ds -pituisen palan massa.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 3\hat{\imath} + 6t\hat{\jmath} + 6t^2\hat{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 3\sqrt{(1+2t^2)^2} = 3(1+2t^2)$$

$$M = \int_0^1 (1+t)\,3(1+2t^2)\,dt$$

$$= 3\int_0^1 (1 + 2t^2 + t + 2t^3)\,dt$$

$$= 3\Big/_0^1 \; t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 = 3\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 + 2 + 3 = \underline{\underline{8}}$$