Vektorianalyysi

k. 2014

Harjoitus 2

Käsitellään ke 19.3.

1.
   a. Laske vektorikentän $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} - x\hat{k}$ käyräintegraali pitkin suoraa viivaa origosta pisteeseen (1,1,1).
   b. Laske vektorikentän $\vec{F} = z\hat{i} - y\hat{j} + 2x\hat{k}$ käyräintegraali pitkin käyrää $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ pisteestä (0,0,0) pisteeseen (1,1,1).
2. Selvitä, onko seuraavilla vektorikentillä $\vec{F}(x, y, z)$ potentiaalia $\phi(x, y, z)$, joko osoittamalla, että potentiaalia ei voi olla tai päättelemällä potentiaalifunktion lauseke:
   a. $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} - x\hat{k}$
   b. $\vec{F} = x\hat{i} - 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$
   c. $\vec{F} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$
3. Laske lauseke vektorikentälle $\vec{E}(x, y, z)$, jonka potentiaali on

$$\phi(x, y, z) = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

4. Laske käyrän $\vec{c}(t) = [(t^3/3 - t]\,\hat{i} + t^2\,\hat{j}$ tangenttivektori $\hat{T}$ ja normaalivektori $\hat{N}$ pisteessä $t = 3$. Vektorit saatuasi varmista laskemalla, että ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan
5. Kappale liikkuu rataa $\vec{r}(t) = t\hat{i} + 2e^t\hat{j} + e^{2t}\hat{k}$ pitkin.
   a. Laske kappaleen nopeus ja kiihtyvyys hetkellä $t = 1$.
   b. Laske kappaleen aikavälinä $t = 1\ldots2$ kulkema matka.
   c. Mikä on radan tangenttivektori hetkellä $t = 0$?
   d. Laske radan kaarevuus kohdassa $\vec{r}(0)$.
6. Mekaniikasta on tuttua kiihtyvyyden esittäminen radan tangentin $\hat{T}$ ja radan normaalin $\hat{N}$ suuntaisten komponenttien avulla,

$$\vec{a} = a_T\hat{T} + a_n\hat{N}.$$

Osoita, että

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa\hat{N}$$

eli

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N},$$

missä κ on kaarevuus ja ρ on kaarevuussäde.

7. Rekka, jonka massa on 10 000 kg ja nopeus 80 km/h kulkee kallistamattoman tien kaarteessa, jota kuvaa käyrä $y = x^2 - x$ (m).
   a. Kuinka suurella kitkavoimalla tie vaikuttaa rekan renkaisiin kaarteen kohdassa (0,0).
   b. Mikä on maksiminopeus, jolla rekka voi kulkea kohdassa (0,0), jos renkaiden ja tienpinnan välinen lähtökitka (lepokitkan maksimiarvo) on 2,5?

FYSA114 Demo 2

$\boxed{1.}$ a.) $\vec{F}(\vec{r}) = y\hat{i} + z\hat{j} - x\hat{k}$

$C: \ \vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j} + t\hat{k} \quad , \ t \in [0,1] \quad , \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 (t\hat{i} + t\hat{j} - t\hat{k})(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})\, dt$$

$$= \int_0^1 (t + t - t)\, dt = \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}$$

b.) $\vec{F}(\vec{r}) = z\hat{i} - y\hat{j} + 2x\hat{k} \quad , \quad C: \ \vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}, \ t \in [0,1]$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^3\hat{i} - t^2\hat{j} + 2t\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k})\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 - 2t^3 + 6t^3)\, dt = \Big/_0^1 \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{6}{4}t^4$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

FYSA114 Demo2

2. Vektorikentällä $\vec{F}$ on potentiaalifunktio ϕ jos $\vec{F}$ on konservatiivinen. $\vec{F}$ on konservatiivinen jos $\nabla\times\vec{F}=0$

a) $\vec{F}(\vec{r}) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} - x\hat{k}$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & -x \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-1) - \hat{\jmath}(-1-0) + \hat{k}(0-1) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Potentiaalifunktiota ei löydy.

b) $\vec{F}(\vec{r}) = x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & -2y & 3z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0$$

$\Rightarrow \exists\,\phi$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + C(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y = \frac{\partial C}{\partial y} \Rightarrow C(y,z) = -y^2 + D(z) \Rightarrow \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + D(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3z = \frac{\partial D}{\partial z} \Rightarrow D(z) = \frac{3}{2}z^2 + E,\ E\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{3}{2}z^2 + E}}$$

FYSA114 Demo 2

$\boxed{2.}$ c.) $\vec{F} = \dfrac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}{x^2+y^2}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(0-0) - \hat{\jmath}\,(0-0) + \hat{k}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial C}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = C(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 = \frac{\partial C}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad C = D \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + D}}$$

FYSA114 Demo 2

$\boxed{3.}$ $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

Potentiaalia ϕ vastaava vektorikenttä saadaan laskemalla potentiaalifunktion gradientti.

$$\nabla\phi = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\hat{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\hat{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\hat{k} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$$

Potentiaali vastaa jotain pallosymmetristä tilannetta, koska vektorikentän voimakkuus ei riipu suunnasta.

FYSA114 Demo 2

$\boxed{4.}$ $\vec{c}(t) = (\frac{t^3}{3} - t)\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$

$$\hat{T} = \frac{\frac{d\vec{c}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{c}}{dt}\right|}, \qquad \frac{d\vec{c}}{dt} = (t^2-1)\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath}$$

$$\left|\frac{d\vec{c}}{dt}\right| = \sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}$$

$$= \sqrt{(t^2+1)^2} = t^2+1$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{T} = \frac{t^2-1}{t^2+1}\hat{\imath} + \frac{2t}{t^2+1}\hat{\jmath}} = \alpha(t)\hat{\imath} + \beta(t)\hat{\imath}$$

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}, \qquad \frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{2t(t^2+1) - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\hat{\imath} + \frac{2(t^2+1) - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\hat{\jmath}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2}\hat{\imath} + \frac{2t^2 + 2 - 4t^2}{(t^2+1)^2}\hat{\jmath}$$

$$= \frac{4t}{(t^2+1)^2}\hat{\imath} + \frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}\hat{\jmath}$$

$$\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \left(\frac{16t^2}{(t^2+1)^4} + \frac{(2-2t^2)^2}{(t^2+1)^4}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)^2}\left(16t^2 + 4 - 8t^2 + 4t^4\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(t^2+1)^2}\left(4 + 8t^2 + 4t^4\right)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{(t^2+1)^2}(1+t^2) = \frac{2}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow \hat{N} = \frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}\hat{\imath} + \frac{2}{(t^2+1)^2}(1-t^2)\hat{\jmath}}{\frac{2}{t^2+1}} = \frac{2t}{t^2+1}\hat{\imath} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\hat{\jmath} = \beta(t)\hat{\imath} - \alpha(t)\hat{\jmath}$$

FYSA114 Demo 2

$\boxed{4.}$ ... jatkuu

$$\hat{T}\cdot\hat{N} = (\alpha(t)\hat{\imath} + \beta(t)\hat{\jmath})\cdot(\beta(t)\hat{\imath} - \alpha(t)\hat{\jmath})$$

$$= \alpha(t)\beta(t) - \alpha(t)\beta(t) = 0$$

$\Rightarrow$ $\hat{T}$ ja $\hat{N}$ ovat $\perp$ kaikilla t. kuten pitää.

$$\hat{T}(3) = \frac{9-1}{9+1}\hat{\imath} + \frac{6}{9+1}\hat{\jmath} = \frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}$$

$$\hat{N}(3) = \frac{3}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{5}\hat{\jmath}.$$

FYSA114 Demo 2

$\boxed{5.}$ $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + 2e^{t}\hat{\jmath} + e^{2t}\hat{k}$

a.) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2e^{t}\hat{\jmath} + 2e^{2t}\hat{k} \overset{t=1}{=} \hat{\imath} + 2e\hat{\jmath} + 2e^{2}\hat{k}$

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2e^{t}\hat{\jmath} + 4e^{2t}\hat{k} = 2e\hat{\jmath} + 4e^{2}\hat{k}$

b.) Kappaleen kulkema matka on ratakäyrän pituus välillä $t \in [1, 2]$.

$$l = \int_1^2 \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_1^2 \sqrt{1 + 4e^{2t} + 4e^{4t}}\, dt = \int_1^2 \sqrt{(1 + 2e^{2t})^2}\, dt$$

$$= \int_1^2 (1 + 2e^{2t})\, dt = \Big/_1^2 t + e^{2t} = 2 + e^4 - 1 - e^2 = \underline{\underline{e^4 - e^2 + 1}}$$

c.)

$\vec{v}(0) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$$\hat{T}(0) = \frac{\vec{v}(0)}{|\vec{v}(0)|} = \frac{\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3}(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})$$

d.) Kaarevuuden määritelmä yleisessä parametrisaatiossa on $K(t) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{a}(0) = 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(8-4) - \hat{\jmath}(4-0) + \hat{k}(2-0)$$

$$= -4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$|\vec{v} \times \vec{a}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 2\sqrt{4 + 4 + 1} = 6 \implies K(t) = \frac{6}{3^3} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$

FYSA114 Demo 2

6.

Kappaleen nopeus voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{T}$$

vauhti — suunta on tangenttivektorin suunta.

Lasketaan tästä kiihtyvyys

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt},$$

$\hat{T} = \hat{T}(s(t))$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\hat{T}}{ds}$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\underbrace{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}_{K}\hat{N} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{1}{\rho}\hat{N}$$

Normaalivektorin määritelmä $\hat{N} = \dfrac{\frac{d\hat{T}}{dx}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dx}\right|}$ (ei riipu parametrisaatiosta)

Nyt on valittu $x = s$ = kuljettu matka.

FYSA114 Demo2

7. Maksimaalisen kitkavoiman tulee olla suurempi kuin rekkaa ympyräliikkeessä pitävä voima $F_n = m a_n = m\frac{v^2}{\rho}$, missä ρ on tien kaarevuussäde.

Aloitetaan parametrisoimalla tietä kuvaava käyrä $y = x^2 - x$. Valitaan $x = t$.

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + (t^2 - t)\hat{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + (2t-1)\hat{\jmath}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\hat{\jmath}$$

Kaarevuussäde on $\rho = \dfrac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}$

Lasketaan tämä pisteessä $(x,y) = (0,0)$ eli $t = 0$.

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{1 + (2t-1)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 - 2t + 1} \overset{t=0}{=} \sqrt{2}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2t-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(2-0) = 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{2^{3/2}}{2} = \sqrt{2}$$

<u>Huom.</u> Käyrän kaarevunteen liittyvät $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ja $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ liittyvät <u>vain</u> käyrään eikä esim. rekan nopeuteen.

FYSA114 Demo 2

$\boxed{7.}$ a.) Rekka ei lähde liukumaan jos

$F_\mu \geq m\frac{v^2}{\rho}$, $v = 80 km/h$, $m = 10^4 kg$

$\rho = \sqrt{2}\, m$

$= 3{,}5\, MN$

Kitkavoiman maksimiarvo on $F_\mu = \mu m g = 245{,}25\, kN$

$\mu = 2{,}5$

$\Rightarrow$ Rekka lähtee liukumaan kaarteessa ja lepokitka on suurimmillaan juuri ennen tätä eli 245,25 kN. Liukuessa renkaisiin vaikuttaa liikekitka.

b.) Rekan maksiminopeus on se nopeus, jolla kitkavoima on yhtä suuri kuin se voima joka vaaditaan pitämään rekka ympyräliikkeessä.

$\mu m g = m\frac{v_x^2}{\rho} \Rightarrow v_x = \sqrt{\rho \mu g} \simeq 5{,}89 m/s = 21\, km/h$