Vektorianalyysi

k. 2014

Harjoitus 3

Käsitellään ke 26.3.

1. Laske voiman $\vec{F}(r) = (x+yz)\hat{i} + (y+xz)\hat{j} + (z+xy)\hat{k}$ tekemä työ $W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}$, kun se liikuttaa kappaletta origosta O = (0,0,0) pisteeseen P= (1,1,1)
   a. suoraa viivaa OP pitkin
   b. käyrää $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$ pitkin
   c. murtoviivaa AO, AB, BP pitkin, kun A = (1,0,0), ja B = (1,1,0).
   d. Laske $\nabla \times \vec{F}$. Minkä kohtia a-c koskevan johtopäätöksen voit siitä vetää?
2. Tämä tehtävä koskee paikkavektoria $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.
   a. Laske $\nabla r, \quad \nabla \cdot \vec{r}, \quad \nabla \times \vec{r}$.
   b. Osoita, että $\nabla f(r) = f'(r)\hat{r}$ ja $\nabla^2 f(r) = \nabla \cdot (\nabla f(r)) = f''(r) + 2\dfrac{f'(r)}{r}$.
   c. Laske $\nabla \dfrac{1}{r}$ ja $\nabla^2 \dfrac{1}{r}$.
3. Muurahainen liikkuu (x, y)-tasolla, jonka lämpötila on jakautunut funktion $T(x, y) = x^2 - 2y^2$ (astetta) mukaisesti.
   a. Hahmottele lämpötilan tasa-arvokäyrät (sopiva määrä niitä) eli isotermit.
   b. Muurahainen on pisteessä (2,-1). Mihin suuntaan sen tulisi lähteä, jos se haluaisi viilennystä mahdollisimman nopeasti?
   c. Jos muurahainen liikkuu tähän suuntaan nopeudella k (matkayks./aikayks.), kuinka monta astetta aikayksikössä lämpötila muuttuu?
   d. Mitä käyrää pitkin muurahaisen tulisi kulkea, jotta lämpötila alenisi koko ajan mahdollisimman paljon. (Adams 12.7, teht. 21).
4. Johda pintojen $x + y + z = 6$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ leikkauskäyrän tangenttivektorin lauseke pisteessä (1,2,3). (Adams 12.7, teht 27)
5. Laske seuraavien vektoreiden divergenssi ja roottori:
   a. $xy\hat{i} + (z^2 - 2y)\hat{j} + \cos yz\hat{k}$
   b. $e^{yz}\hat{i} + e^{xz}\hat{j} + e^{xy}\hat{k}$
   c. $\dfrac{x}{y}\hat{i} + \dfrac{y}{z}\hat{j} + \dfrac{z}{x}\hat{k}$
6. Osoita oikeiksi seuraavat nablailutulokset:
   a. $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$
   b. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
   c. $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
   d. $\nabla \times (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A})$

FYSA114 Demo 3

$\boxed{1.}$ Lasketaan voiman $\vec{F}$ siirtymässä C tekemä työ eli $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$$\vec{F}(\vec{r}) = (x + yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + xy)\hat{k}$$

a.) $C: \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t\hat{k}, \quad t \in [0,1]$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 (t + t^2 + t + t^2 + t + t^2) dt$$

$$= 3 \int_0^1 (t + t^2) dt = 3 \Big/_0^1 \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{2}$$

b.) $C: \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}, \quad t \in [0,1]$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(t + t^5)\hat{\imath} + (t^2 + t^4)\hat{\jmath} + (t^3 + t^3)\hat{k}] \cdot (\hat{\imath} + 2t\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}) \, dt$$

$$= \int_0^1 (t + t^5 + 2t^3 + 2t^5 + 6t^5) dt = \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5) dt$$

$$= \Big/_0^1 \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{6}t^6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

FYSA114 Demo 3

$\boxed{1.}$ c.) C: Murtoviiva $(0,0,0) \xrightarrow{1^\circ} (1,0,0) \xrightarrow{2^\circ} (1,1,0) \xrightarrow{3^\circ} (1,1,1)$

Parametrisoidaan osissa:

C_1: $\vec{r}_1(t) = t\hat{\imath}$, $t \in [0,1]$ $\qquad \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \hat{\imath}$

C_2: $\vec{r}_2(t) = \hat{\imath} + t\hat{\jmath}$, $t \in [0,1]$ $\qquad \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \hat{\jmath}$

C_3: $\vec{r}_3(t) = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + t\hat{k}$, $t \in [0,1]$ $\qquad \frac{d\vec{r}_3}{dt} = \hat{k}$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(t+0)\hat{\imath} + (0+0)\hat{\jmath} + (0+0)\hat{k}]\cdot\hat{\imath}\, dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(1+0)\hat{\imath} + (t+0)\hat{\jmath} + (0+t)\hat{k}]\cdot\hat{\jmath}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(1+t)\hat{\imath} + (1+t)\hat{\jmath} + (t+1)\hat{k}]\cdot\hat{k}\,dt = \int_0^1 (t+1)\,dt = \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{5}{2}$$

d.) $$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+yz & y+xz & z+xy \end{vmatrix} = \hat{\imath}(x-x) - \hat{\jmath}(y-y) + \hat{k}(z-z) = 0$$

$\Rightarrow \vec{F}$ on konservatiivinen

$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ riippuu vain reitin päätepisteistä.

FYSA114 Demo 3

$\boxed{2}$ Olk. $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ja $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a.) $$\nabla r = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{k} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

$\nabla \cdot \vec{r}$, $\nabla \cdot \vec{F}$ on vektorikentän divergenssi
$= 1+1+1$ ja lasketaan $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
$= 3$

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0$$

b.) $$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}$$
$$= \frac{df}{dr}\nabla r = f'(r)\hat{r}$$

$$\nabla^2 f(r) = \nabla \cdot \nabla f(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\right) = f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \cancel{2}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + f'(r) \cdot \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Ja muut derivaatat samaan tapaan

$$\Rightarrow \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
$$= f''(r) \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} + f'(r) \cdot \frac{y^2+z^2 + z^2+x^2 + x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

FYSA114 Demo 3

$\boxed{2.}$

$$\nabla^2 f = f''(r) + 2f'(r)\underbrace{\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{\frac{1}{r}} = f''(r) + 2f'(r)\frac{1}{r}$$

c.) $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{r}$, $r>0$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{r} = 0$$

FYSA114 Demo 3

$\boxed{3.}$ $T(x,y) = x^2 - 2y^2$

a.) Tasa-arvokäyrät saadaan kun kiinnitetään funktion T arvo.

$$x^2 - 2y^2 = T_0$$
$$2y^2 = x^2 - T_0$$
$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{T_0}{2}}$$

b.) Nyt etsitään suunnatun derivaatan minimiä.

$$D_{\hat{u}}T = \nabla T \cdot \hat{u} = |\nabla T|\underbrace{|\hat{u}|}_{=1}\cos\phi$$

Minimi löytyy kun $\phi = -\pi$, eli suunta on $-\nabla T$

Nyt $\nabla T = 2x\hat{\imath} - 4y\hat{\jmath} \overset{(2,-1)}{=} 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

$-\nabla T(2,-1) = -4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ eli normitettuna $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath} - \hat{\jmath})$

c.) Lasketaan $\frac{dT}{dt}$ kun $x = x(t)$ ja $y = y(t)$

s.e. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = k\hat{u} = \frac{k}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath} - \hat{\jmath})$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla T \cdot \vec{r}\,'(t)$$

$$= (4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) \cdot \frac{k}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath} - \hat{\jmath}) = -k\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right) = -4\sqrt{2}k$$

$(x,y) = (2,-1)$

FYSA114 Demo 3

3. d.) Muurahaisen tulee kulkea jatkuvasti suuntaan $-\nabla T = 2x\hat{i} - 4y\hat{j}$

Pitää olla $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2x\hat{i} - 4y\hat{j}$, missä $\vec{r}(t)$ on reitin parametriesitys.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 e^{2t} \Rightarrow e^{2t} = \frac{x}{x_0} \\ y = y_0 e^{-4t} \end{cases}$$

$$= y_0 (e^{2t})^{-2} = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2}$$

$$= \frac{y_0 x_0^2}{x^2}$$

Eli reitti on käyrä $y = \frac{C}{x^2}$

Jos $y(2) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{C}{4} \Rightarrow C = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{x^2}$

↑ Muurahaisen lähtöpiste.

Toinen tapa laskea nämä käyrät on laskea lämpötilan tasa-arvokäyrille kohtisuorat leikkaajat.

$$F(x,y) = x^2 - 2y^2 - T_0 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{-4y} = \frac{x}{2y} \Rightarrow \frac{dy_\perp}{dx} = -\frac{2y_\perp}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y_\perp} dy_\perp = -\int \frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln|y_\perp| = -2\ln|x| + \ln D = \ln \frac{D}{x^2}, \; D > 0$$

$$\Rightarrow y_\perp = \frac{C}{x^2}$$

Jei!

FYSA114 Demo 3

4. Etsitään pintojen $x+y+z=6$ ja $x^2+y^2+z^2=14$ leikkauskäyrän tangenttivektori pisteessä $(x,y,z)=(1,2,3)$. Tämä vektori on kohtisuorassa molempien pintojen normaalivektorien kanssa.

Pintojen normaalivektorit saadaan laskemalla pintojen tasa-arvoesitysten gradientit.

Pinta 1 $F_1(x,y,z) = x+y+z=6$

$$\vec{N}_1 = \nabla F_1 = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$$

Pinta 2 $F_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=14$

$$\vec{N}_2 = \nabla F_2 = 2x\hat{\imath}+2y\hat{\jmath}+2z\hat{k}$$

Kahden vektorin ristitulona saatava vektori on kohtisuorassa tulon molempien vektorien kanssa.

$$\Rightarrow \vec{T}(x,y,z) = \pm\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \pm\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

$$= \pm\left[\hat{\imath}(2z-2y) - \hat{\jmath}(2z-2x) + \hat{k}(2y-2x)\right]$$

$$= \pm 2\left[(z-y)\hat{\imath} + (x-z)\hat{\jmath} + (y-x)\hat{k}\right]$$

$$\vec{T}(1,2,3) = \pm(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}), \quad |\vec{T}(1,2,3)| = \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \hat{T}(1,2,3) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k})$$

FYSA114 Demo 3

$\boxed{5.}$ Lasketaan annettujen vektorikenttien divergenssi $\nabla \cdot \vec{F}$ ja roottori $\nabla \times \vec{F}$.

a.) $\vec{F}(x,y,z) = xy\hat{\imath} + (z^2 - 2y)\hat{\jmath} + \cos(yz)\hat{k}$

$$\nabla \cdot \vec{F} = y - 2 - y\sin(yz)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & z^2-2y & \cos(yz) \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(-z\sin(yz) - 2z\right) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(0-x)$$

$$= -z(\sin(yz) + 2)\hat{\imath} - x\hat{k}$$

b.) $\vec{F}(x,y,z) = e^{yz}\hat{\imath} + e^{xz}\hat{\jmath} + e^{xy}\hat{k}$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{yz} & e^{xz} & e^{xy} \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(xe^{xy} - xe^{xz}\right) - \hat{\jmath}\left(ye^{xy} - ye^{yz}\right) + \hat{k}\left(ze^{xz} - ze^{yz}\right)$$

$$= x(e^{xy} - e^{xz})\hat{\imath} + y(e^{yz} - e^{xy})\hat{\jmath} + z(e^{xz} - e^{yz})\hat{k}$$

c.) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x}{y}\hat{\imath} + \frac{y}{z}\hat{\jmath} + \frac{z}{x}\hat{k}$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{y} & \frac{y}{z} & \frac{z}{x} \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(0 + \frac{y}{z^2}\right) - \hat{\jmath}\left(-\frac{z}{x^2} - 0\right) + \hat{k}\left(0 + \frac{x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{y}{z^2}\hat{\imath} + \frac{z}{x^2}\hat{\jmath} + \frac{x}{y^2}\hat{k}$$

FYSA114 Demo 3

6. Olk. vektorikentät: $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $\vec{B}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

a.) $$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \nabla \cdot \left[(A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \right]$$

$$= (\partial_x A_y) B_z + A_y \partial_x B_z - (\partial_x A_z) B_y - A_z \partial_x B_y$$
$$- (\partial_y A_x) B_z - A_x \partial_y B_z + (\partial_y A_z) B_x + A_z \partial_y B_x$$
$$+ (\partial_z A_x) B_y + A_x \partial_z B_y - (\partial_z A_y) B_x - A_y \partial_z B_x$$

$$= (\partial_x A_y - \partial_y A_x) B_z + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) B_y + (\partial_y A_z - \partial_z A_y) B_x$$
$$+ A_y (\partial_x B_z - \partial_z B_x) + A_z (\partial_y B_x - \partial_x B_y) + A_x (\partial_z B_y - \partial_y B_z)$$

$$= \vec{B} \cdot \left[(\partial_y A_z - \partial_z A_y)\hat{\imath} - (\partial_x A_z - \partial_z A_x)\hat{\jmath} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{k} \right]$$
$$- \vec{A} \cdot \left[(\partial_y B_z - \partial_z B_y)\hat{\imath} - (\partial_x B_z - \partial_z B_x)\hat{\jmath} + (\partial_x B_y - \partial_y B_x)\hat{k} \right]$$

$$= B \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

b.) $$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \cdot \left[(\partial_y A_z - \partial_z A_y)\hat{\imath} - (\partial_x A_z - \partial_z A_x)\hat{\jmath} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{k} \right]$$

$$= \partial_x \partial_y A_z - \partial_x \partial_z A_y - \partial_y \partial_x A_z + \partial_y \partial_z A_x$$
$$+ \partial_z \partial_x A_y - \partial_z \partial_y A_x$$

$$= 0$$

Termit kumoutuvat, koska derivointijärjestyksellä ei ole väliä.

FYSA114 Demo 3

$\boxed{6.}$ c.) Olk. skalaarikenttä $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \nabla \times (\partial_x \phi \hat{\imath} + \partial_y \phi \hat{\jmath} + \partial_z \phi \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} = \hat{\imath}(\partial_y \partial_z \phi - \partial_z \partial_y \phi) - \hat{\jmath}(\partial_x \partial_z \phi - \partial_z \partial_x \phi) + \hat{k}(\partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi)$$

$= 0$, koska derivointijärjestyksellä ei ole väliä.

d.) $$\nabla \times (\phi \vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\big((\partial_y \phi) A_z + \phi \partial_y A_z - (\partial_z \phi) A_y - \phi \partial_z A_y\big)$$
$$- \hat{\jmath}\big((\partial_x \phi) A_z + \phi \partial_x A_z - (\partial_z \phi) A_x - \phi \partial_z A_x\big)$$
$$+ \hat{k}\big((\partial_x \phi) A_y + \phi \partial_x A_y - (\partial_y \phi) A_x - \phi \partial_y A_x\big)$$

$$= \phi\big(\hat{\imath}(\partial_y A_z - \partial_z A_y) - \hat{\jmath}(\partial_x A_z - \partial_z A_x) + \hat{k}(\partial_x A_y - \partial_y A_x)\big)$$
$$+ \hat{\imath}\big((\partial_y \phi) A_z - (\partial_z \phi) A_y\big) - \hat{\jmath}\big((\partial_x \phi) A_z - (\partial_z \phi) A_x\big) + \hat{k}\big((\partial_x \phi) A_y - (\partial_y \phi) A_x\big)$$

$$= \phi(\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \phi) \times \vec{A}$$