Vektorianalyysi
k. 2014

Harjoitus 6

Käsitellään ke 23.4.

1. Olkoon V alue, jota rajoittavat tasot $x=0, y=0$ ja $z=2$ sekä pinta $z=x^2+y^2$ ja jossa $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Laske funktion $f(x,y,z)=x$ tilavuusintegraali tämän alueen yli. Tämä laskettiin luennolla (ks. s. 73) suorittamalla ensimmäiseksi z-integrointi. Laske integraali nyt niin, että integroit ensin x:n yli.

2. Tarkastellaan kappaletta
$$S=\left\{(x,y,z) \middle| 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x-y \leq z \leq x+y\right\}.$$
   a) Laske kappaleen tilavuus.
   b) Laske kappaleen massa, kun tiheys on $\rho(x,y,z)=x+2y+4z$ (kg/m^3).

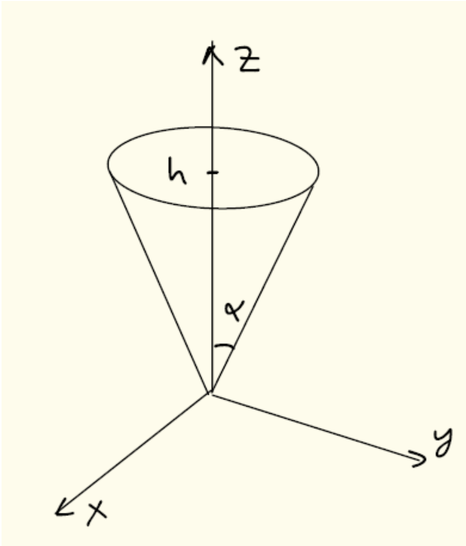
3. Tarkastellaan a-säteistä origokeskistä palloa. Pallon tiheys on suoraan verrannollinen pallon keskipisteestä mitattuun etäisyyteen, ts. $\rho(\vec{r})=\alpha r$, jossa α on vakio. Laske pallon massa
$$M=\iiint_S \rho(\vec{r})dV.$$

4. Kun kappaleen tiheysjakautuma $\rho(\vec{r})$ tunnetaan, saadaan kappaleen painopisteen paikkavektori $\vec{r}_{CM}$ laskettua kaavasta (käy perustelu läpi Adamsin luvusta 14.7)
$$\vec{r}_{CM}=\frac{\iiint\limits_{\text{kappale}} \rho(\vec{r})\vec{r}dV}{\iiint\limits_{\text{kappale}} \rho(\vec{r})dV}.$$
Laske origokeskisen a-säteisen pallon oktantissa $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ olevan osan painopisteen paikka. Pallon tiheys oletetaan vakioksi.

5. Ympyräkartio, jonka korkeus on h ja kärkikulma α, sijaitsee kuvan mukaisesti kärki origossa ja akselina z-akseli. Kartion tiheys on ρ ja massa M. Laske kartion aiheuttama gravitaatiovoima origossa sijaitsevaan pistemäiseen kappaleeseen, jonka massa on m. Newtonin painovoimateorian mukaan M-massaisen kappaleen aiheuttama voima m-massaiseen kappaleeseen on
$$\vec{F}=G\frac{mM}{d^3}\hat{e},$$
Typo: 3 ----> 2

jossa d on kappaleiden painopisteiden välinen etäisyys ja $\hat{e}$ on kappaleiden painopisteiden yhdysjanan suuntainen yksikkövektori massasta m massaan M.

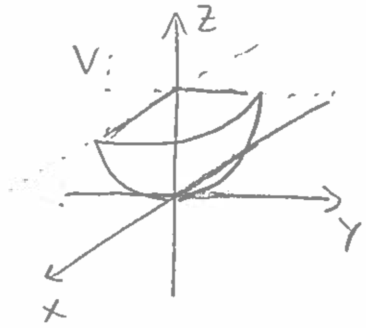
Ohje: Laske pisteessä $\vec{r}$ olevan massa-alkion $dM = \rho(\vec{r})dV$ aiheuttama voima Newtonin kaavaa käyttäen ja integroi yli kartion. Integrointi kannattanee suorittaa käyttäen sylinteri- tai pallokoordinaatistoa (tai molempia - emme kiellä!).



FYSA114 Demo6

$\boxed{1.}$ $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$

Laske $\int_V dV x$.



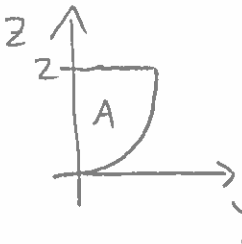
Integroidaan ensin x-suunnassa.

Nyt $x \in [0, \sqrt{z-y^2}]$

↑ Tämä saatiin pinnan $z = x^2+y^2$ yhtälöstä.

yz-koordinaatistossa integroidaan alueen A yli kun $A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2,\ z \in [0,2],\ y \in [0, \sqrt{z}]\}$

↑ Tämä saatiin yhtälöstä $z = x^2+y^2$ kun $x = 0$.



$$\Rightarrow \int_V dV x = \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_0^{\sqrt{z-y^2}} dx\, x = \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \Big/_0^{\sqrt{z-y^2}} \tfrac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy\,(z-y^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 dz \Big/_0^{\sqrt{z}}\ yz - \frac{1}{3}y^3$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dz\left(z^{3/2} - \frac{1}{3}z^{3/2}\right) = \frac{1}{3}\int_0^2 dz\, z^{3/2} = \frac{1}{3}\Big/_0^2 \frac{2}{5}z^{5/2}$$

$$= \frac{2}{15}\cdot 2^{5/2} = \underline{\underline{\frac{8}{15}\sqrt{2}}}$$

FYSA114 Demo 6

$\boxed{2.}$ $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x,\ x-y\le z\le x+y\}$

a.) $V=\int_S dV = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x-y}^{x+y} dz = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\,(x+y-(x-y))$

Integrointirajat saadaan suoraan joukon määrittelystä.

$$= 2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\, y = \int_0^1 dx \Big/_{x^2}^{x} y^2$$

$$= \int_0^1 dx\,(x^2-x^4) = \Big/_0^1 \tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{5}x^5$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

b.) Tilavuus saatiin laskemalla yhteen pieniä tilavuusalkioita dV. Massa saadaan vastaavasti kun lasketaan summa pienistä massa-alkioista $dm=\rho dV$

$$\Rightarrow M=\int_S dV\rho = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\int_{x-y}^{x+y} dz\,(x+2y+4z) = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy \Big/_{x-y}^{x+y} xz+2yz+2z^2$$

$$= \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\,\big(x(x+y)+2y(x+y)+2(x+y)^2-x(x-y)-2y(x-y)-2(x-y)^2\big)$$

$$= \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\,\big(\cancel{x^2}+\cancel{xy}+2yx+2y^2+\cancel{2x^2}+4xy+2y^2-\cancel{x^2}+\cancel{xy}-\cancel{2yx}+\cancel{2y^2}-\cancel{2x^2}+4xy-\cancel{2y^2}\big)$$

$$= \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\,(10yx+4y^2) = \int_0^1 dx\Big/_{x^2}^{x} 5y^2x+\tfrac{4}{3}y^3$$

$$= \int_0^1 dx\,\big(5x^3+\tfrac{4}{3}x^3-5x^5-\tfrac{4}{3}x^6\big) = \Big/_0^1 \tfrac{5}{4}x^4+\tfrac{1}{3}x^4-\tfrac{5}{6}x^6-\tfrac{4}{21}x^7$$

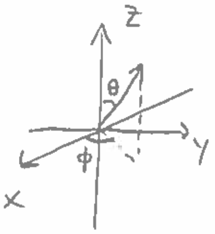
$$= \frac{5}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}_{\frac{2-5}{6}=-\frac{3}{6}}-\frac{4}{21} = \frac{5}{4}-\frac{1}{2}-\frac{4}{21} = \frac{3}{4}-\frac{4}{21} = \frac{63}{84}-\frac{16}{84} = \frac{47}{84}$$

FYSA114 Demo 6

$\boxed{3.}$ $\rho(\vec{r}) = \alpha r$ Laske $M = \int dV \rho(\vec{r})$

$\overline{B}(0;a) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3, |\vec{r}| \leq a\}$

Pallokoordinaatistossa $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$



$$M = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, r^2 \sin\theta \, \alpha r$$

$$= 2\pi\alpha \underbrace{\int_0^a dr \, r^3}_{\frac{a^4}{4}} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{=2} = 4\pi\alpha \cdot \frac{a^4}{4} = \underline{\underline{\pi \alpha a^4}}$$

FYSA114 Demo 6

4. Pistemäisistä kappaleista koostuvan systeemin massakeskipiste, eli massoilla painotettu keskiarvo paikkavektoreista saadaan laskettuna kaavalla:

$$\vec{R}_{MKP} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

Jatkuvan kappaleen tapauksessa kappaleen ajatellaan koostuvan äärettömän monesta äärettömän pienestä massa-alkiosta dm ja summa korvataan integraalilla $\Rightarrow \vec{R}_{MKP} = \frac{1}{M}\int dm\,\vec{r} = \frac{1}{M}\int dV \rho(\vec{r})\vec{r}$

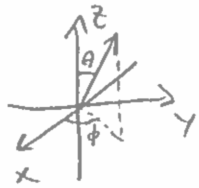
Olk. $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$

Lasketaan $\vec{R}_{MKP}$ kun $\vec{\rho}(\vec{r}) = \rho_0 =$ vakio

$$M = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\rho_0 = \frac{1}{6}\pi a^3 \rho_0$$

$$\vec{R}_{MKP} = \frac{1}{M}\int dV\,\rho_0(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

Kappale on symmetrinen kaikkien koordinaattiakselien suhteen, joten riittää laskea z_{MKP}



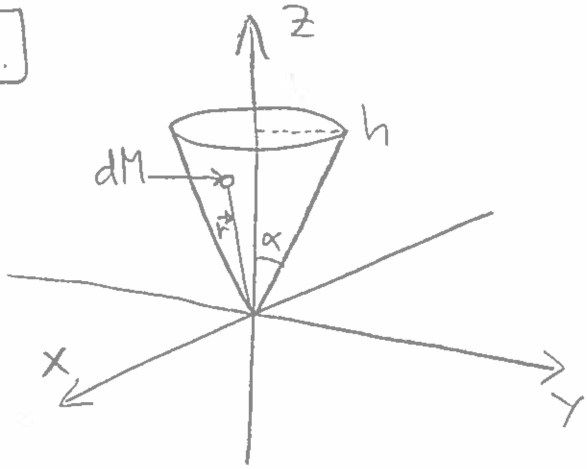
$$z_{MKP} = \frac{\rho_0}{M}\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\, \sin\theta\, r^2 \cdot \underbrace{r\cos\theta}_{z}$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^a dr\, r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \sin\theta\cos\theta = \frac{\pi\rho_0}{2M}\cdot\frac{a^4}{4}\cdot \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

$$= \frac{\pi\rho_0 a^4}{8M}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\cancel{\pi}\cancel{\rho_0} a^{\cancel{4}}}{16}\cdot\frac{6}{\cancel{\pi}\cancel{a^3}\cancel{\rho_0}} = \frac{3}{8}a \Rightarrow \underline{\underline{\vec{R}_{MKP} = \frac{3a}{8}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}}$$

FYSA114 Demo6

$\boxed{5.}$

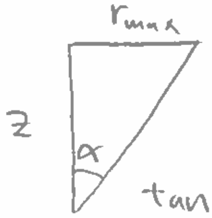


Sylinterikoordinaateissa

$\theta \in [0, 2\pi]$

$z \in [0, h]$

$r \in [0, z\tan\alpha]$



$\tan\alpha = \frac{r_{max}}{z}$

$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{k}$

Pistemassan M aiheuttama voima testimassaan m on $\vec{F} = G\frac{mM}{d^2}\hat{e}$, missä $\hat{e}$ osoittaa massasta m massaan M ja $|\hat{e}| = 1$.

Ajatellaan kartion koostuvan pienistä paloista dM joista jokainen aiheuttaa voiman $d\vec{F}$ massaan m. Lasketaan voimat $d\vec{F}$ yhteen integroimalla.

Nyt $d = |\vec{r}|$ ja $\hat{e} = \frac{\vec{r}}{d}$ sekä $d = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Lisäksi $dM = \rho\, dV = \rho r\, dr\, d\theta\, dz$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int d\vec{F} = Gm\int \frac{dM}{d^2}\hat{e} = Gm\int_0^h dz \int_0^{z\tan\alpha} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\rho r}{d^3} \cdot (r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{k})$$

Kulmaintegraali hävittää $\hat{\imath}$ ja $\hat{\jmath}$ komponentit, sillä

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos\theta = \Big/_0^{2\pi} \sin\theta = 0 = \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta = \Big/_0^{2\pi} -\cos\theta$$

FYSA114

$\boxed{5.}$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2\pi G \rho m \hat{k} \int_0^h dz \int_0^{z\tan\alpha} dr \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi G \rho m \hat{k} \int_0^h dz \Big/_0^{z\tan\alpha} \frac{1}{2} \frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} (-2))$$

$$= 2\pi G \rho m \hat{k} \int_0^h dz \left(\underbrace{\frac{z}{(0+z^2)^{1/2}}}_{=1} - \underbrace{\frac{z}{(z^2\tan^2\alpha + z^2)^{1/2}}} \right)$$

$$\frac{1}{(\tan^2\alpha + 1)^{1/2}} = \frac{\cos\alpha}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^{1/2}}$$

$$= \cos\alpha$$

$$= 2\pi G \rho m h (1 - \cos\alpha) \hat{k}$$