Vektorianalyysi
k. 2014

Harjoitus 7

Käsitellään ma 5.5.

1. a) Osoita, että kappaleen tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S \vec{r} \cdot \hat{N} dS,$$

jossa $\vec{r}$ on paikkavektori ja S on kappaleen pinta.

b) Osoita Gaussin lain perusteella, että

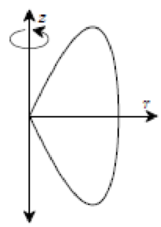
$$\iiint_D \nabla \phi dV = \oiint_S \phi \hat{N} dS.$$

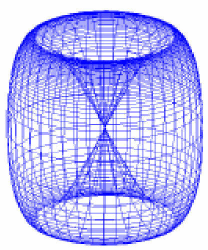
Vihje: Sovella Gaussia vektorikenttään $\vec{F} = \phi \vec{c}$, jossa $\vec{c}$ on mielivaltainen vakiovektori.

2. Laske pintaintegraali $\oiint_D (2xy\hat{i} + 3y\hat{j} + 2z\hat{k}) \cdot d\vec{S}$, jossa D on koordinaattitasojen $x = 0,\ y = 0$ ja $z = 0$ ja tason $x + y + z = 1$ rajoittama alue.

(Vastaus: 11/12.)

3. Tarkastellaan käyrän





$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \cos u,$$

$$z = \sin 2u, \qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}.$$

muodostamaa pyörähdyskappaletta eli kappaletta, joka syntyy, kun käyrä pyörähtää z-akselin ympäri.

Laske kappaleen tilavuus

$$V = \iiint_{\text{kappale}} dV$$

Gaussin lain avulla.

Vihjeitä: Huomaa, että yksinkertaisin valinta vektorikentäksi on $\vec{F} = z\hat{k}$.
Pintaintegraalin laskemiseksi anna pinnalle parametriesitys, jossa

parametreina ovat u ja pyörähdyskulma θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Esitä pintaintegraalissa esiintyvä pinta-alkio dS suureen $dud\theta$ avulla.
(Vastaus: $\pi^2 / 2$.)

4. Tarkastellaan yksikköpalloa $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Laske Gaussin lausetta hyväksi käyttäen tilavuusintegraali

$$I = \iiint_D z^2 dV.$$

Ohje: Taaskin kannattaa valita vektorikentäksi $\vec{F}$ yksinkertaisin vaihtoehto.
(Vastaus: $4\pi / 15$.)

5. Olkoon vektorikenttä

$$\vec{F} = (z - 2y)\hat{i} + (3x - 4y)\hat{j} + (z + 3y)\hat{k}.$$

Laske Stokesin teoreeman avulla käyräintegraali

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kun käyrä C on

a) tasossa $z = 2$ oleva yksikköympyrä,

b) sellaisen kolmion reuna, jonka kärjet ovat pisteissä (1,0,0), (0,1,0) ja (0,0,1).

(Vastaukset 5π tai -5π ja $9/2$ tai -9/2.)

6. Laske vektorikentän

$$\vec{F} = (e^x - y^3)\hat{i} + (e^y + x^3)\hat{j} + e^z\hat{k}$$

käyräintegraali pitkin käyrää

$$\vec{r} = \cos t\, \hat{i} + \sin t\, \hat{j} + \sin 2t\, \hat{k} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Vihje: Stokes-hommia. Huomaa, että käyrä on tasossa $z = 2xy$ trigonometrian tutun kaavan mukaan.
(Vastaus: $3\pi / 2$ tai -3π/2.)

FYSA114 Demo 7

$\boxed{1.}$ Olk. S suljettu pinta joka rajaa sisäänsä alueen V.

a.) $$\oint_S \vec{r}\cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\hat{N}ds} \underset{\substack{\uparrow \\ S \text{ suljettu} \\ \Rightarrow \text{Gauss}}}{=} \int_V \underbrace{\nabla\cdot\vec{r}}_{=3}\, dV = 3\int_V dV = 3V$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{s}$$

b.) Olk. $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ (vakio)

$$\oint_S \vec{c}\phi\cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{c}\phi\cdot\hat{N}\,ds = \oint_S \phi\,(c_x\hat{\imath}+c_y\hat{\jmath}+c_z\hat{k})\cdot(N_x\hat{\imath}+N_y\hat{\jmath}+N_z\hat{k})\,ds$$

$$= \oint_S \phi(c_xN_x + c_yN_y + c_zN_z)\,ds$$

$$= c_x\oint_S \phi N_x\,ds + c_y\oint_S \phi N_y\,ds + c_z\oint_S \phi N_z\,ds$$

$$= \vec{c}\cdot\left(\hat{\imath}\oint_S \phi N_x\,ds + \hat{\jmath}\oint_S \phi N_y\,ds + \hat{k}\oint_S \phi N_z\,ds\right)$$

$$= \vec{c}\cdot\oint \phi(N_x\hat{\imath}+N_y\hat{\jmath}+N_z\hat{k})\,ds = \vec{c}\cdot\oint \phi\hat{N}\,ds = \vec{c}\cdot\oint \phi\,d\vec{s}$$

ok

S suljettu $\Rightarrow$ Gauss:

$$\oint_S \vec{c}\phi\cdot d\vec{s} = \int_V \nabla\cdot(\phi\vec{c})\,dV = \int_V (\nabla\phi\cdot\vec{c} + \phi\underbrace{\nabla\cdot\vec{c}}_{=0})\,dV$$

$$= \int_V \left(c_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + c_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + c_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dV$$

$$= c_x\int_V \frac{\partial\phi}{\partial x}dV + c_y\int_V \frac{\partial\phi}{\partial y}dV + c_z\int_V \frac{\partial\phi}{\partial z}dV$$

FYSA114 Demo 7

1.

$$= \vec{c} \cdot \left(\hat{\imath} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} dV + \hat{\jmath} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial y} dV + \hat{k} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial z} dV \right)$$

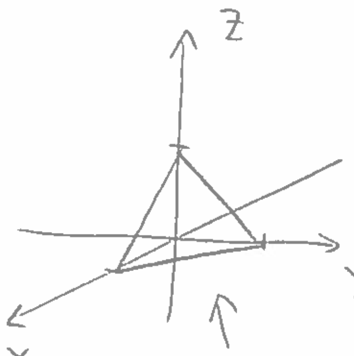
$$= \vec{c} \cdot \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \right) dV = \vec{c} \cdot \int \nabla \phi \, dV$$

OK

Näiden pitää pätea $\forall \vec{c}$ joten

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \phi \, d\vec{s} = \int_V \nabla \phi \, dV}$$

FYSA114 Demo 7



Pinta on suljettu "pyramidi".

$\boxed{2.}$

$$\oint_S \underbrace{(2xy\,\hat{i} + 3y\,\hat{j} + 2z\,\hat{k})}_{\vec{F}} \cdot d\vec{s}$$

Gauss

$$= \int_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \int_V (2y+3+2)\,dV$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} dz\,(2y+5)$$

$x+y+z=1$

$z = 1-x-y$

$\Rightarrow z \in [0, 1-x-y]$

$x \in [0, 1-y]$

$y \in [0,1]$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\,\underbrace{(2y+5)(1-x-y)}_{2y+5-2yx-5x-2y^2-5y}$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx\,(5-5x-3y-2yx-2y^2)$$

$$= \int_0^1 dy \Big/_0^{1-y} 5x - \frac{5}{2}x^2 - 3yx - yx^2 - 2y^2x$$

$$= \int_0^1 dy\,\left(5(1-y) - \frac{5}{2}(1-y)^2 - 3y(1-y) - y(1-y)^2 - 2y^2(1-y)\right)$$

$$= \int_0^1 dy\,\left(5 - \cancel{5y} - \frac{5}{2} + \cancel{5y} - \frac{5}{2}y^2 - 3y + 3y^2 - y + \cancel{2y^2} - y^3 - \cancel{2y^2} + 2y^3\right)$$

$$= \int_0^1 dy\left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{1}{2}y^2 + y^3\right) = \Big/_0^1 \frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{4}y^4$$

$$= \frac{5}{2} - 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{30}{12} - \frac{24}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

FYSA114 Demo 7

$\boxed{3.}$ $r = \sqrt{x^2+y^2} = \cos u$ $\circledast$

$z = \sin(2u)$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Kappale on pyörähdyssymmetrinen z-akselin suhteen $\Rightarrow$ sylinterikoordinaatit.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \overset{\circledast}{=} \cos u \cos\theta &&, \quad u \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ y &= r\sin\theta = \cos u \sin\theta &&, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z &= z = \sin(2u) \end{aligned}$$

Saatiin pinnan parametrisaatio:

$$\vec{r}(u,\theta) = \cos u \cos\theta\,\hat{\imath} + \cos u \sin\theta\,\hat{\jmath} + \sin(2u)\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -\sin u \cos\theta\,\hat{\imath} - \sin u \sin\theta\,\hat{\jmath} + 2\cos(2u)\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\cos u \sin\theta\,\hat{\imath} + \cos u \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\cos u \sin\theta & \cos u \cos\theta & 0 \\ -\sin u \cos\theta & -\sin u \sin\theta & 2\cos(2u) \end{vmatrix}$$

$\hat{\imath}$ ja $\hat{\jmath}$ -komponentteja ei tarvita.

$$= \hat{\imath}(\dots) - \hat{\jmath}(\dots) + \hat{k}(\cos u \sin u \sin^2\theta + \cos u \sin u \cos^2\theta)$$

$$= \cos u \sin u\,\hat{k} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{S} = (\cos u \sin u\,\hat{k} + \dots)\,du\,d\theta$$

$$V = \int_V dV = \int_V \underbrace{\nabla\cdot(z\hat{k})}_{=1} dV = \oint_S z\hat{k}\cdot d\vec{S}$$

FYSA114 Demo 7

$\boxed{3.}$

$$\oint_S z\hat{k}\cdot(\cos u \sin u\,\hat{k}+\ldots)\,du\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} d\theta \; \underbrace{\sin(2u)}_{z} \cdot \cos u \sin u = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du\, 2\cos^2 u \sin^2 u$$

$$= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \; \frac{1}{2}(1+\cos(2u)) \cdot \frac{1}{2}(1-\cos(2u))$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \left(1-\cos^2(2u)\right) = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4u)\right)$$

$$= \pi \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{2} - \frac{1}{8}\sin(4u) = \pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}$$

FYSA114 Demo 7

$\boxed{4.}$ $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, A on 1-säteinen pallokuori.

$$I = \int_V z^2 dV = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{z^3}{3}\hat{k}\right) dV = \oint_A \left(\frac{z^3}{3}\hat{k}\right) \cdot d\vec{s}$$

Pallokuorelle $d\vec{s} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \underset{|r|=r=1}{=} \vec{r} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \frac{z^3}{3}\hat{k} \cdot \vec{r} \sin\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, z^4 \sin\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} d\theta \, \cos^4\theta \sin\theta = \frac{2\pi}{3} \Big/_0^{\pi} -\frac{1}{5}\cos^5\theta = -\frac{2\pi}{15}(-1-1) = \frac{4\pi}{15}$$

FYSA114 Demo 7

$\boxed{5.}$ $\vec{F} = (z - 2y)\hat{\imath} + (3x - 4y)\hat{\jmath} + (z + 3y)\hat{k}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-2y & 3x-4y & z+3y \end{vmatrix} = \hat{\imath}(3-0) - \hat{\jmath}(0-1) + \hat{k}(3+2)$$

$$= 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

Laske $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

a.) $C = \{$yksikköympyrän kehä tasossa $z = 2\}$

C on suljettu ⇒ Stokes

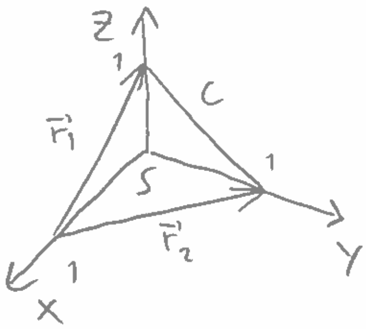
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S (3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}) \cdot (\pm \hat{k}\, dS)$$

Kiertosuunta ei ole määritelty.

$$= \pm 5 \int_S dS = \underline{\underline{\pm 5\pi}}$$

b.) $C = \{$kolmio, kärkipisteet $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)\}$

C on suljettu ⇒ Stokes



Tarvitaan kolmion normaalivektori:

$\vec{r}_1 = \hat{k} - \hat{\imath}$

$\vec{r}_2 = \hat{\jmath} - \hat{\imath}$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\Rightarrow \hat{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$$

Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S (3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}) \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})\right) dS = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \int_S (3 + 1 + 5)\, dS$$

$$= \pm \frac{9}{\sqrt{3}} \int_S dS = \pm \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\pm \frac{9}{2}}$$

Kolmion pinta-ala

FYSA114 Demo 7

$\boxed{6.}$ $\vec{F} = (e^x - y^3)\hat{\imath} + (e^y + x^3)\hat{\jmath} + e^z\hat{k}$

$C: \vec{r}(t) = \cos t\,\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath} + \sin(2t)\hat{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$

Lasketaan $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Käyrä on suljettu $\Rightarrow$ Stokes.

Huom. käyrä toteuttaa yhtälön $z = 2xy$

$\Rightarrow$ käyrä on siis osa pintaa $\vec{r}(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + 2xy\hat{k}$.

Käyrän C x- ja y-komponentit muodostavat yksikköympyrän kehän $\Rightarrow$ C on reunakäyrä pinnalle S:

$\vec{r}(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + 2xy\hat{k}$ kun $(x,y) \in \bar{B}(0;1)$ (= yksikköympyrä)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^x - y^3 & e^y + x^3 & e^z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0-0) - \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}(3x^2 + 3y^2)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = \hat{\imath} + 2y\hat{k} \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-2y) - \hat{\jmath}(2x) + \hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \hat{\jmath} + 2x\hat{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{S} = \pm(-2y\hat{\imath} - 2x\hat{\jmath} + \hat{k})\,dx\,dy$$

$$\int_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\int_S (3x^2 + 3y^2)\hat{k}\cdot(-2y\hat{\imath} - 2x\hat{\jmath} + \hat{k})\,dx\,dy = \pm 3\int_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \pm 3\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta\, \underbrace{r}_{|J|}\, r^2 = \pm 6\pi\int_0^1 dr\, r^3 = \pm\frac{6\pi}{4} = \underline{\underline{\pm\frac{3\pi}{2}}}$$

Napakoordinaatit