Vektorianalyysi

k. 2014

Harjoitus 2

Käsitellään ke 19.3.

1.
   a. Laske vektorikentän $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} - x\hat{k}$ käyräintegraali pitkin suoraa viivaa origosta pisteeseen (1,1,1).
   b. Laske vektorikentän $\vec{F} = z\hat{i} - y\hat{j} + 2x\hat{k}$ käyräintegraali pitkin käyrää $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ pisteestä (0,0,0) pisteeseen (1,1,1).
2. Selvitä, onko seuraavilla vektorikentillä $\vec{F}(x, y, z)$ potentiaalia $\phi(x, y, z)$, joko osoittamalla, että potentiaalia ei voi olla tai päättelemällä potentiaalifunktion lauseke:
   a. $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} - x\hat{k}$
   b. $\vec{F} = x\hat{i} - 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$
   c. $\vec{F} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$
3. Laske lauseke vektorikentälle $\vec{E}(x, y, z)$, jonka potentiaali on

$$\phi(x, y, z) = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

4. Laske käyrän $\vec{c}(t) = [(t^3/3 - t]\,\hat{i} + t^2\,\hat{j}$ tangenttivektori $\hat{T}$ ja normaalivektori $\hat{N}$ pisteessä $t = 3$. Vektorit saatuasi varmista laskemalla, että ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan
5. Kappale liikkuu rataa $\vec{r}(t) = t\hat{i} + 2e^t\,\hat{j} + e^{2t}\hat{k}$ pitkin.
   a. Laske kappaleen nopeus ja kiihtyvyys hetkellä t = 1.
   b. Laske kappaleen aikavälinä t = 1…2 kulkema matka.
   c. Mikä on radan tangenttivektori hetkellä t =0?
   d. Laske radan kaarevuus kohdassa $\vec{r}(0)$.
6. Mekaniikasta on tuttua kiihtyvyyden esittäminen radan tangentin $\hat{T}$ ja radan normaalin $\hat{N}$ suuntaisten komponenttien avulla,

$$\vec{a} = a_T\hat{T} + a_n\hat{N}.$$

Osoita, että

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \hat{N}$$

eli

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N},$$

missä κ on kaarevuus ja ρ on kaarevuussäde.

7. Rekka, jonka massa on 10 000 kg ja nopeus 80 km/h kulkee kallistamattoman tien kaarteessa, jota kuvaa käyrä $y = x^2 - x$ (m).
   a. Kuinka suurella kitkavoimalla tie vaikuttaa rekan renkaisiin kaarteen kohdassa (0,0).
   b. Mikä on maksiminopeus, jolla rekka voi kulkea kohdassa (0,0), jos renkaiden ja tienpinnan välinen lähtökitka (lepokitkan maksimiarvo) on 2,5?