Vektorianalyysi

k. 2014

Tentti pe 9.5.

1. Tarkastellaan skalaarikenttää

$$f(x,y,z) = ze^{x^2-y^2}.$$

   a) Laske f:n suunnattu derivaatta vektorin $\vec{u} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ suuntaan pisteessä (1,-1,2).
   b) Mihin suuntaan f kasvaa nopeinten pisteessä (1,-1,2)?
   c) Johda pinnan $f(x,y,z) = 2$ tangenttitason yhtälö pisteessä (1,-1,2).

2. Laske vektorikenttien

$$\vec{F} = x^2 y\hat{i} - 2yz\hat{j} + x^3 y^2 \hat{k} \quad \text{ja}$$

$$\vec{G} = y^2 z\hat{i} - 2zx\hat{j} + x^3 y^2 \hat{k}$$

   vuot $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ja $\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$ alueen $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$ reunapinnan S läpi ulospäin.

3. Tarkastellaan vektorikenttää $\vec{u} = (x^2 + y^2)\hat{i} + \sqrt{1+y^3}\,\hat{j}$.

   a) Laske kentän divergenssi ja roottori.
   b) Laske käyräintegraali $\int_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$, jossa C on käyrä

      $\vec{r}(t) = \cos t\ \hat{i} + \sin t\ \hat{j},\quad 0 \le t \le \pi.$

4. Laske skalaarikentän $f(x,y) = x^2 + y^2$ tilavuusintegraali $\iiint_D f dV$ kahden seuraavan alueen yli:

   a) $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y,\ 0 \le z \le 1.$
   b) $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2.$

5. a) Tasossa tehdään muuttujan vaihto $(x,y) \to (u,v)$ siten, että

$$x = f(u,v),$$

$$y = g(u,v).$$

   Johda lauseke pinta-alkiolle $dS = dxdy$ uusien muuttujien u ja v avulla lausuttuna.

   b) Laske käyrien $y = 2x,\ y = x,\ xy = 4$ ja $xy = 1$ rajoittaman pinnan S pinta-ala sopivaa muuttujainvaihtoa käyttäen. Laske myös integraali

$$\oiint_S y^2 dxdy.$$

KÄÄNNÄ PAPERI

6. Osoita Stokesin teoreemaa käyttäen, että

$$\oint_C (y\,dx + z\,dy + x\,dz) = \sqrt{3}\pi a^2,$$

jossa C on sopivalla tavalla suunnistettu pintojen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja $x + y + z = 0$ leikkauskäyrä.