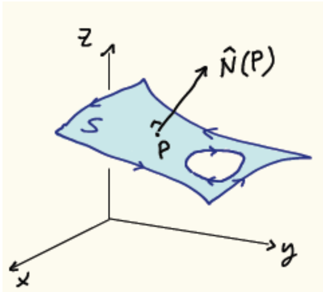
VEKTORIANALYYSI

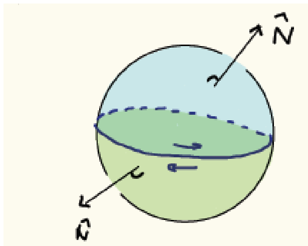
Luento 10

Vuointegraalit

Pinta-alkiovektori. Pinnan sanotaan olevan *suunnistuva*, jos sille on määriteltävissä pinnan pisteestä P toiseen jatkuvasti muuttuva pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori $\hat{N}(P)$. Se puoli pintaa, josta $\hat{N}$ osoittaa ulospäin, on pinnan positiivinen puoli, ja se toinen puoli on negatiivinen puoli.



Pinnan reunakäyrälle voidaan normaalin avulla määritellä suunnistus. Sopimus on, että jos kävelet reunakäyrää pitkin pinnan positiivisella puolella, niin pinta on sinun vasemmalla puolellasi. Sama asia voidaan ilmaista myös oikean käden sääntönä: jos oikean käden sormet kiertyvät reunan suunnistuksen mukaisesti, peukalo osoittaa normaalin suuntaan (ks. kuva).



Myös suljettu pinta voidaan suunnistaa: Esimerkiksi pallon pinnan voi ajatella koostuvan kahdesta puolipallosta, jotka on liitetty toisiinsa päiväntasaajalla. Molemmilla puolipallopinnoilla normaali osoittaa pallosta ulospäin, jos yhteisen reunakäyrän suunnistukset ovat puolipalloille vastakkaiset. Pallon ulkopinta on positiivinen puoli ja sisäpinta negatiivinen puoli.

Määritellään normaalin avulla *pinta-alkiovektori*:

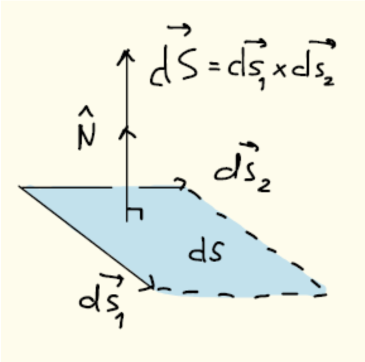
$$d\hat{S} = \hat{N} dS.$$

Tämä on siis pinta-alkioon liittyvävektori, jonka suuruus on pinta-alkion pinta-ala ja suunta pinnan yksikkönormaalin $\hat{N}$ suunta.

Kaksi pinnalla olevaa infinitesimaalista vektoria $d\hat{s}_1$ ja $d\hat{s}_2$ virittävät suunnikkaan, jonka ala on infinitesimaalisen pinta-alkion ala dS:

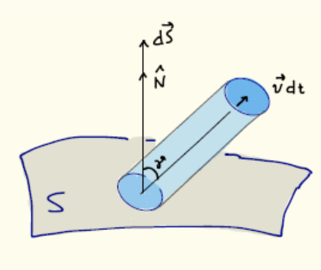
$$dS = \left| d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2 \right|.$$

Kun $(d\hat{s}_1,\ d\hat{s}_2, \hat{N})$ muodostavat oikeakätisen vektorikolmikon, on $d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2$ vektorin $\hat{N}$ suuntainen, joten



$$d\hat{S} = \hat{N} dS = \frac{d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2}{\left| d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2 \right|} \left| d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2 \right|$$
$$= d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2.$$

Vektorikentän vuo pinnan läpi. Lähestytään asiaa fysikaalisen esimerkin kautta. Oletetaan, että pinnan *S* virtaa ainetta (nestettä tai kaasua, yhdellä sanalla sanoen fluidia). Oletetaan lisäksi, että virtaus on stationääristä eli fluidin nopeus pinnan pisteen (x,y,z) kohdalla $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ ei riipu ajasta. Tarkastellaan pinnan pientä pinta-alkiota dS. Ajassa dt tämän pinta-alkion läpi kulkeneen fluidin tilavuus dV on sen vinosylinterin tilavuus, jonka pohjana on dS ja jonka pituus on vdt (ks. kuva). Sylinterin tilavuus on sen korkeus kerrottuna poikkipinta-alalla



$dA = \cos\gamma dS$, missä γ on pinnan normaalivektorin $\hat{N}$ ja nopeuden $\vec{v}$ välinen kulma,

$$\cos\gamma = \frac{\hat{N} \cdot \vec{v}}{v}.$$

Saamme siis tilavuudeksi dV

$$dV = vdtdA = vdt \frac{\hat{N} \cdot \vec{v}}{v} dS = \vec{v} \cdot \hat{N} dSdt$$
$$= (\vec{v} \cdot d\vec{S})dt.$$

Virtaus aikayksikössä eli vuo on siten $\vec{v}\cdot d\vec{S}$. Vuo koko pinnan *S* läpi on

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

Yleistetään tämä: Olkoon $\vec{F}(x, y, z)$ jokin vektorikenttä. Silloin integraalin

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot \hat{N} dS$$

sanotaan olevan *vektorin* $\vec{F}$ *vuo pinnan S läpi*.

Vuo on lokaalisti positiivinen, jos $\vec{F}$ osoittaa samalle puolelle pintaa kuin normaali $\hat{N}$, ja negatiivinen, jos se osoittaa vastakkaiselle puolelle. Jos yli pinnan integroitu vuo on positiivinen, ”vektoria virtaa” pinnan läpi enemmän pinnan negatiiviselta puolelta positiiviselle puolelle kuin päin vastaiseen suuntaan.

Jos pinta *S* on suljettu, merkitään vuointegraalia usein $\oiint \vec{F}\cdot d\vec{S}$. Jos vektorikentällä on suljetun pinnan sisällä lähde,vuointegraali on positiivinen, jos pinnan sisällä on nielu, vuointegraali on negatiivinen.

***

Esimerkki: Lasketaan vektorin ($\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$)

$$\vec{F} = \frac{m\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

vuo yli *a*-säteisen pallopinnan, jonka keskipiste on origossa.

Pallon pinnalla $|\vec{r}| = a$ ja $\hat{N} = \vec{r}\,/\,|\vec{r}| = \vec{r}\,/\,a$. Pinta-alkio pallokoordinaateissa esitettynä on $dS = a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$. Vuo on

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{N}dS = \iint_S \left(\frac{m\hat{r}}{a^2}\right)\cdot\hat{r}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$= m\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi m,$$

missä $\hat{r} = \vec{r}\,/\left|\vec{r}\right| = \vec{r}\,/\,a,\;\; \hat{r}\cdot\hat{r} = 1$. Huomataan, että vuo ei riipu pallon säteestä. Se johtuu siitä, että vektorin $\vec{F}$ pituus pienenee kuten a^{-2}, mutta samalla pinta-alkion dS ala kasvaa kuten a^2. Kenttä liittyy siis origossa olevaan lähteeseen, jossa syntyy aikayksikössä $4\pi m$ yksikköä ”ainetta”.

***

Esimerkki: Lasketaan paikkavektorin $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ vuoyksikön korkuisen sylinterin $x^2 + y^2 = \rho^2$ pinnan läpi. Sylinterin pohjan oletetaan olevan *xy*-tasossa.

Pinta koostuu kolmesta osasta, vaipasta, kannesta ja pohjasta. Lasketaan vuo kunkin niistä läpi erikseen ja lasketaan lopussa yhteen.

Vaippa: Vaipan pisteeseen (*x*,*y*,*z*) piirretty yksikkönormaali on pisteen (*x*,*y*) radiusvektorin suuntainen yksikkövektori eli

$$\hat{N}(x,y,z) = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho}\hat{i} + \frac{y}{\rho}\hat{j}.$$

Vuo vaipan läpi on silloin

$$\int\limits_{\text{vaippa}} dS\left(\frac{x}{\rho}\hat{i}+\frac{y}{\rho}\hat{j}\right)\cdot\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)=\int\limits_{\text{vaippa}} dS\left(\frac{x^2}{\rho}+\frac{y^2}{\rho}\right)=\int\limits_{\text{vaippa}} dS\,\rho$$

$$=\rho\int\limits_{\text{vaippa}} dS=\rho(2\pi\rho)\cdot 1=2\pi\rho^2.$$

Kansi: Pinnan normaali on $\hat{N}=\hat{k}$, joten

$$\int\limits_{\text{kansi}} dS\ \hat{k}\cdot\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)=\int\limits_{\text{kansi}} dS\ \underbrace{z}_{=1}=\pi\rho^2.$$

Pohja: Pohjassa $\vec{r}$ on kohtisuorassa pinnan normaalia $\hat{N}=-\hat{k}$ vastaan, joten vuo on sen läpi nolla.

Paikkavektorin kokonaisvuo tarkastellun sylinterikappaleen pinnan läpi on siis

$$\iint\limits_{\text{Sylinteri}} d\vec{S}\cdot\vec{r}=2\pi\rho^2+\pi\rho^2+0=3\pi\rho^2=3V,$$

missä V on sylinterin tilavuus.

***