VEKTORIANALYYSI

Luento 11

7. Tilavuusintegraalit

A 14.5

Funktion $f(x,y,z)$ tilavuusintegraali yli kolmiulotteisen alueen V on raja-arvo summasta

$$\sum_V f(x,y,z)\Delta V$$

kun tilavuusalkiot $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \to 0.$ Tarkastellaan ensin tämän integraalin suorittamista karteesissa koordinaatistossa ja sen jälkeen käyräviivaisissa koordinaatistoissa, kuten sylinteri- ja pallokoordinaatistoissa.

Oletataan, että alue, jonka yli integroidaan, on säännöllinen *z*-suunnassa. Silloin voidaan ensin integroida *z*-suunnassa alueen pohjapinnasta $z = \phi_1(x,y)$ kansipintaan $z = \phi_2(x,y)$ (ks. kuva) ja sen jälkeen *x*:n ja *y*:n suhteen yli *xy*-tasossa olevan alueen projektion *G*:

$$\iiint_V dV\, f(x,y,z) = \iint_G dxdy \underbrace{\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} dz\, f(x,y,z)}_{\text{jokin } x\text{:n ja } y\text{:n funktio}}.$$

Voi myös ensin tehdä pintaintegraalin alueen poikkipinnan $G(z)$ yli ja sitten integroida z:n yli niin, että koko alue tulee käydyksi läpi:

$$\iiint_V dV\, f(x,y,z) = \int_a^b dz \underbrace{\iint_{G(z)} dxdy\, f(x,y,z)}_{\text{jokin } z\text{:n funktio}}.$$

Pintaintegraaliosat voidaan suorittaa niin kuin aikaisemmin opimme.

***

Esimerkki: Olkoon V alue, jota rajoittavat tasot $x = 0, y = 0$ ja $z = 2$ sekä pinta $z = x^2 + y^2$ ja jossa $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Lasketaan funktion $f(x,y,z) = x$ tilavuusintegraali tämän alueen yli.

Kuvasta voi päätellä, että integroimisalue V on se, jossa koordinaateille on voimassa ehdot

$$0 \leq x \leq \sqrt{2},$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2},$$
$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$

Integraali on silloin

$$
\begin{aligned}
I = \int_V dV\ x &= \iint_G dS \left[\int_{x^2+y^2}^{2} dz\ x \right] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{2} dz\ x \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} dx\ x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \left[2-(x^2+y^2) \right] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} dx\ x \left[\left[(2-x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right] \right]_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} dx\ x \left[(2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} \right] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} dx\ \frac{2}{3} x(2-x^2)^{3/2} \\
&= \left[-\frac{2}{15}(2-x^2)^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}
$$

Harjoitustehtäväksi jätetään laskea integraali niin, että ensimmäisenä suoritetaan x-integrointi.

***

Adamsin kirjassa on luvussa 14.5 useita hyviä esimerkkejä. Katso ainakin esimerkit 2, 3 ja 4.

Muuttujanvaihto tilavuusintegraalissa. Tehdään muuttujanvaihto

$$
\begin{aligned}
x &= x(u,v,w), \\
y &= y(u,v,w), \\
z &= z(u,v,w).
\end{aligned}
$$

Kuten jo pintaintegraalien yhteydessä totesimme, muuttujanvaihdossa differentiaalinen integroimisalkio yleensä muuttuu kooltaan. Meidän pitää siis selvittää, mikä on *dudvdw* avulla ilmaistuna se *uvw*-avaruuden alue, joka vastaa alkuperäisen tilavuusintegraalin tilavuusalkiota $dV = dxdydz$.

Tilavuusalkio on suuntaissärmiö, jonka virittää paikkavektorin $\vec{r}$ infinitesimaalinen muutos $d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz.$ Särmiön sivujen pituudet ovat *dx*, *dy* ja *dz* ja tilavuus on siten $dV = dxdydz$.
Sivulla 52 tarkastelimme, millainen muutos aiheutuu paikkavektoriin $\vec{r} = \vec{r}\,(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, kun esimerkiksi parametrin *u* arvoon tehdään infinitesimaalinen muutos *du* eli $u \to u + du$. Muutos on vektori

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\bigg|_{(u,v,w)} du = \left(\hat{i}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \hat{j}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \hat{k}\,\frac{\partial z}{\partial u} \right)_{(u,v,w)} du \equiv \vec{a}.$$

Kahden muun parametrin muutokset antavat vastaavasti vektorit

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\bigg|_{(u,v,w)} dv \equiv \vec{b}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\bigg|_{(u,v,w)} dw \equiv \vec{c}.$$

Paikkavektorin infinitesimaalinen muutos parametrien avulla esitettynä on ketjusäännön mukaan

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\bigg|_{(u,v,w)} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\bigg|_{(u,v,w)} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\bigg|_{(u,v,w)} dw,$$

jossa (u,v,w) ovat pistettä (x, y, z) vastaavat parametriarvot. Edellä olevat kolme vektoria virittävät *xyz*-avaruuteen infinitesimaalisen suuntaissärmiön *dV*, jonka tilavuus on

$$
\begin{aligned}
dV &= \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right| \\
&= \left| a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right| \\
&= \left\| \begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix} \right\| dudvdw \\
&\equiv \underbrace{\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|}_{\text{Jacobin determinantin itseisarvo}} dudvdw \equiv \left| J(u,v,w) \right| dudvdw.
\end{aligned}
$$

Muuttujanvaihto siis skaalaa tilavuuselementit seuraavasti:

$$
dV = dxdydz = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw.
$$

Funktion $f(x,y,z)$ tilavuusintegraali karteesisen *xyz*-avaruuden alueen *D* yli voidaan siis esittää seuraavalla tavalla käyräviivaisia koordinaatteja *uvw* käyttäen:

$$
\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_H \hat{f}(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw,
$$

jossa *H* on se *uvw*-parametriavaruuden alue, joka kuvautuu muuttujanvaihdossa *xyz*-avaruuden alueeksi *D*, ja

$$
\hat{f}(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).
$$

***

Esimerkki: Lasketaan integraali

$$\iiint_D dxdydz\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right),$$

jossa

$$D=\{(x,y,z)\,|\,x\in[y/2,1+y/2],y\in[0,4],z\in[0,3]\}.$$

Tehdään muuttujanvaihto, joka yksinkertaistaa integroimisaluetta:

$$u=\frac{2x-y}{2},v=\frac{y}{2},w=\frac{z}{3}.$$

Helposti nähdään, että integroimisalueeksi *uvw*-avaruudessa tulee

$$H=\{(u,v,w)\,|\,u\in[0,1],v\in[0,2],w\in[0,1]\}.$$

Muuttujanvaihdon Jacobin determinantti on (huom. $x=u+v,y=2v,z=3w$)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=6.$$

Tilavuusintegraali on

$$\iiint_D dxdydz\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)$$
$$=\iiint_H dudvdw\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|(u+w)$$
$$=\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{2}\int_{w=0}^{1} dudvdw|6|(u+w)$$
$$=6\left[u^2/2\right]_0^1\left[v\right]_0^2\left[w\right]_0^1+6\left[u\right]_0^1\left[v\right]_0^2\left[w^2/2\right]_0^1$$
$$=6+6=12.$$

***

A 16.7

Jos oletamme, että uudet muuttujat (u,v,w) ovat *suorakulmaisen käyräviivaisen koordinaatiston koordinaatteja*, muuttujanvaihtoon liittyvä Jacobin determinantti on helppo määrittää. Silloin nimittäin edellä määritellyt vektorit $\vec{a},\ \vec{b}$ ja $\vec{c}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja niiden kolmitulo

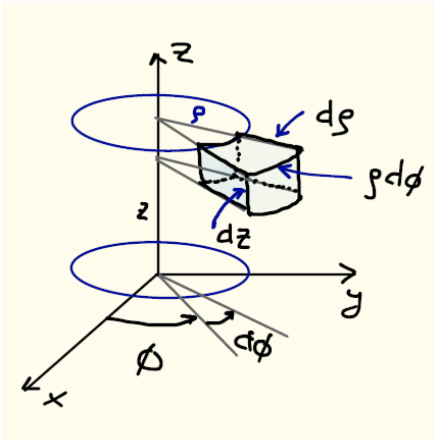
$$\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$$
$$=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|du\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|dv\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|dw$$
$$=h_u h_v h_w dudvdw,$$

jossa $h_u,\ h_v$ ja h_w ovat aiemmin määrittelemiämme skaalaustekijöitä (ks. s. 61). Suorakulmaisessa käyräviivaisessa koordinaatistossa tilavuusintegraali on siis

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_H \hat{f}(u,v,w)\underbrace{h_u h_v h_w dudvdw}_{=dV}$$

Sylinterikoordinaatistossa

$$x = \rho \cos \phi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho \sin \phi,$$
$$z = z,$$

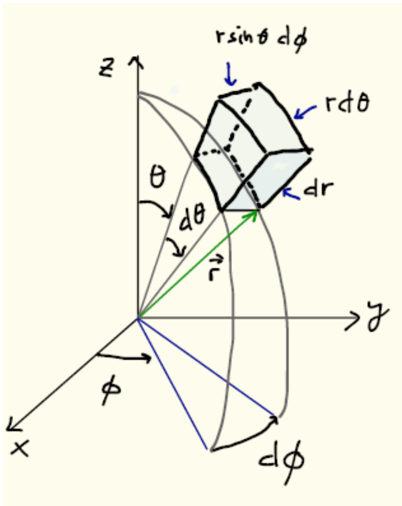


tilavuuselementti on (ks. s. 62)

$$dV = h_\rho h_\phi h_z d\rho d\phi dz = \rho\, d\rho d\phi dz.$$

Tämä nähdään myös geometrisesti oheisesta kuvasta.

Pallokoordinaatistossa



$$x = r \sin\theta \cos\phi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi,$$
$$z = r \cos\theta,$$

vastaavasti

$$dV = h_r h_\theta h_\phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi.$$

Myös tämän näkee geometrisesti kuvasta.