VEKTORIANALYYSI

Luento 12

8. Gaussin lause eli divergenssilause[1]

A 16.4

Kurssin jäljellä olevassa osassa käymme läpi joukon fysiikan kannalta tärkeitä vektorikenttien integrointia koskevia tuloksia, nimittäin Gaussin, Stokesin ja Greenin lauseita ja niiden sovelluksia. Lauseissa tai kaavoissa on kyse jonkin alueen yli otetun integraalin ja tämän alueen reunan yli otetun integraalin välisestä yhteydestä.

Vuointegraaleja käsitellessämme totesimme, että vektorikentän vuo yli suljetun pinnan kertoo jotain vektorikentästä pinnan rajoittaman alueen sisällä, nimittäin onko kentällä siellä nieluja tai lähteitä. *Gaussin lause* ilmaisee asian tarkemmin: vektorikentän vuo yli suljetun pinnan S on sama kuin vektorikentän divergenssin tilavuusintegraali pinnan rajoittaman alueen D yli eli

$$\oint\!\!\oint_S \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\vec{F}\,dV.$$

Tässä $\hat{N}$ on pinnasta ulospäin osoittava yksikkönormaali. Matemaattisina oletuksina vaaditaan, että pinta S on sileä tai koostuu sileistä osapinnoista, kenttä $\vec{F}$ on jatkuva suljetussa alueessa D eli siis myös rajoitettu ja kentän derivaatat ovat jatkuvia alueen D sisällä.

Todistus: Oletetaan, että alue D on koordinaattiakseleiden suunnassa säännöllinen eli akseleiden suuntaiset suorat

[1] Venäläisissä oppikirjoissa tätä kutsutaan Ostrogradskyn lauseeksi.

leikkaavat alueen reunan korkeintaan kahdesti. (Jos näin ei ole, pilkotaan alue säännöllisiin osiin.)

Divergenssi on

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \right)$$

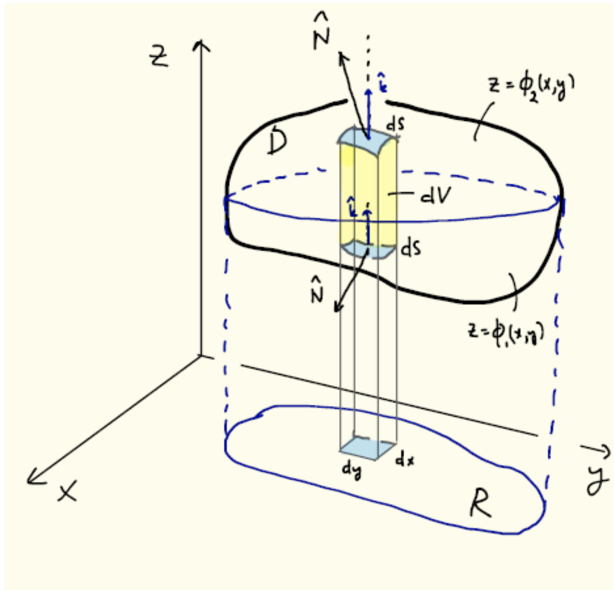
$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Tarkastellaan aluksi viimeisen termin tilavuusintegraalia

$$\iiint_D \frac{\partial F_z}{\partial z} dV = \iint_R dxdy \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \qquad (*)$$

$$= \iint_R \left(F_z(x, y, \phi_2(x, y) - F_z(x, y, \phi_1(x, y)) \right) dxdy,$$

jossa R on alueen D projektio xy-tasossa ja $z = \phi_1(x, y)$ ja $z = \phi_2(x, y)$ ovat z:n ylä- ja alarajat. Ensimmäinen termi voidaan tulkita pintaintegraaliksi pinnan $z = \phi_2(x, y)$ yläpuolen yli (normaalivektori osoittaa ylös eli kasvavan z:n suuntaan)



$$\iint_R F_z(x, y, \phi_2(x, y))\, dxdy = \iint_{\text{yläpinta}} F_z \hat{k} \cdot \hat{N} dS \quad ,$$

missä pinta-alkio dS on projisioitu xy-tasoon, $dxdy = \hat{k} \cdot \hat{N} dS = \cos(\hat{k}, \hat{N}) dS$. Jälkimmäinen termi puolestaan on pintaintegraali yli pinnan $z = \phi_1(x, y)$ alapuolen yli (normaalivektori osoittaa alas eli pienenevän *z*:n suuntaan):

$$-\iint_R F_z(x, y, \phi_1(x, y))\, dxdy = \iint_{\text{alapinta}} F_z \hat{k} \cdot \hat{N} dS,$$

koska nyt $dxdy = -\hat{k} \cdot \hat{N} dS = -\cos(\hat{k}, \hat{N}) dS,$ sillä $\cos(\hat{k}, \hat{N}) \le 0$.

Olemme siis osoittaneet, että

$$\oiiint_D \frac{\partial F_z}{\partial z} dV = \oiint_S F_z \hat{k} \cdot \hat{N} dS. \tag{1}$$

Vastaavalla tavalla voimme käsitellä $\vec{F}$:n kahdesta muusta komponenteista F_x ja F_y riippuvia termejä. Esimerkiksi tilavuusintegraalin F_x-osa

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{\partial F_x}{\partial x} dV &= \iint_R dydz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \\ &= \iint_R \left(F_x(\psi_2(y,z), y, z) - F_x(\psi_1(y,z), y, z) \right) dydz,\end{aligned}$$

jossa *R* on nyt alueen *D* *yz*-tasossa oleva projektio. Kun pintaintegraali

$$\oiint_S F_x \hat{i} \cdot \hat{N} dS$$

esitetään pintojen $x = \psi_1(y, z)$ ja $x = \psi_2(y, z)$ yli otettujen pintaintegraalien summana, saadaan sama tulos eli

$$\oiiint_D \frac{\partial F_x}{\partial x} dV = \oiint_S F_x \hat{i} \cdot \hat{N} dS. \tag{2}$$

Vastaavasti

$$\iiint_D \frac{\partial F_y}{\partial y} dV = \oiint_S F_y \hat{j} \cdot \hat{N} dS. \qquad (3)$$

Yhdistämällä tulokset (1)-(3) saamme

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

eli Gaussin lause on tullut todistetuksi. ■

Todistuksemme ei ole yleispätevä, koska se perustui oletukseen alueen säännöllisestä muodosta. Tulos pätee kuitenkin kaikille suljetuille pinnoille. Tätä voi vakuutella itselleen fysikaalisen esimerkin avulla: Sähkökentän $\vec{E}$ divergenssi $\nabla \cdot \vec{E}$ on varaustiheys ja sen tilavuusintegraali on alueessa *D* oleva kokonaisvaraus. Pintaintegraali on sähkökentän vuo alueen pinnan läpi, ja on helppo uskoa, ettei vuo riipu pinnan muodosta: kenttäviivat tulevat pinnan läpi oli se minkä muotoinen tahansa.

Huom. Gaussin lause on yhden muuttujan funktiota koskevan tuloksen $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ yleistys kolmeen ulottuvuuteen.

***

Esimerkki: Lasketaan kentän

$$\vec{F} = bxy^2\hat{i} + bx^2y\hat{j} + (x^2 + y^2)z^2\hat{k}$$

pintaintegraali sylinterin $x^2 + y^2 \le a^2, \quad 0 \le z \le b$ pinnan yli.

Gaussin lain mukaan pintaintegraali voidaan esittää tilavuus-integraalina, ja sen voimme laskea helposti sylinterikoordinaatteja käyttäen:

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dV \\
&= \iiint_R \left[by^2 + bx^2 + 2z(x^2+y^2) \right] dV \\
&= \iiint_R \underbrace{(x^2+y^2)}_{=\rho^2} (b+2z) \quad \underbrace{dV}_{=\rho d\rho d\phi dz} \\
&= \int_0^b (b+2z)dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho^2 (\rho d\rho) \\
&= \left[bz + z^2 \right]_0^b \left[\phi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a = \pi a^4 b^2 .
\end{aligned}$$

***

Esimerkki: Määritetään integraalin

$$I = \oiint_S (3x\hat{i} + 2y\hat{j}) \cdot d\vec{S}$$

arvo, kun *S* on pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ pinta. Pintaintegrointi ei näytä suoraviivaiselta, joten kannattaa yrittää hyödyntää Gaussin teoreemaa. Integroitavan vektorin $\vec{F} = 3x\hat{i} + 2y\hat{j}$ divergenssi on

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x (3x) + \partial_y (2y) + \partial_z (0) = 5,$$

joten

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iiint_D 5 dV = 5 \underbrace{\iiint_D dV}_{=\text{pallon tilavuus}} \\
&= 5 \cdot \frac{4}{3} \pi (\sqrt{9})^3 = 180\pi .
\end{aligned}$$

***

Esimerkki: Tarkastellaan vektorikenttää

$$\vec{F} = m\frac{\vec{r}}{r^3} = m\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Se on määritelty kaikkialla muualla paitsi origossa. Lasketaan tämän kentän vuo yli mielivaltaisen säännöllisen pinnan *S*, joka ympäröi origoa.

Koska pinnasta *S* ei tiedetä juuri mitään, pitää ottaa Gaussin kaava käyttöön. Siihen tarvitaan divergenssi $\nabla \cdot \vec{F}$. Koska $(r \neq 0)$

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{m}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}),$$

on divergenssi

$$\nabla \cdot \vec{F} = m\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Lasketaan ensimmäinen derivaatta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

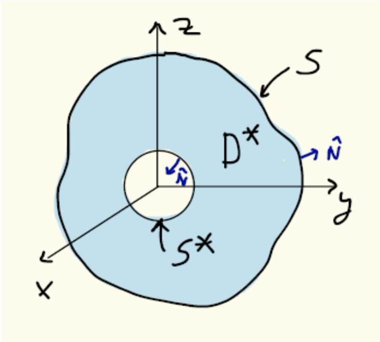
$$= \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6}.$$

Muut termit voi päätellä symmetrian avulla. Divergenssi on

$$\nabla \cdot \vec{F} = m\left[3\frac{r^3}{r^6} - 3\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=r^2}\frac{r}{r^6}\right]$$
$$= 0.$$

Seuraavaksi meidän on hoidettava origo, joka on pinnan S rajoittaman alueen D sisällä, mutta jossa divergenssi ei ole määritelty. Asiaa hoituu seuraavalla tempulla: Piirretään origon ympärille pallopinta S^*, joka jää kokonaan alueen D sisälle. Kentän $\vec{F}$ ulospäin suuntautuva vuo tämän pinnan läpi on

$$\oiint_{S^*} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S^*} \left(\frac{m\hat{r}}{r^2}\right)\left(r^2 \sin\theta d\theta d\phi\, \hat{r}\right)$$
$$= m\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi m.$$



Tarkastellaan nyt pintojen S ja S^* väliin jäävää aluetta D^* ja sovelletaan Gaussin kaavaa siihen. Vuo ulos alueesta D^* koostuu kahdesta osasta: vuo pinnan S läpi ulospäin ja vuo pallon S^* pinnan läpi *sisäänpäin*. Jälkimmäinen on yllä olevan kaavan perusteella $-4\pi m$ (eri merkki johtuu siitä, että pinta-alavektori osoittaa nyt pallon sisälle, ei ulos siitä). Gaussin kaavan mukaan saamme siis

$$0 = \iiint_{D^*} \nabla \cdot \vec{F} dV = \oiint_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S} - 4\pi m$$

eli

$$\oiint_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi m.$$

Tämä on se pintaintegraali, jota alun perin kysyttiin.

***

Esimerkki: Origoon asetetun pistevarauksen q aiheuttama sähkökenttä on

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Mikä on sähkökentän vuo minkä tahansa origoa ympäröivän pinnan läpi?

Edellisen esimerkin tuloksen mukaan se on

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Tätä kutsutaan sähköopissa Gaussin laiksi.

***

Esimerkki: **Jatkuvuusyhtälö.**

Tarkastellaan jossakin juoksevassa aineessa olevaa kuvitteelista pintaa S ja sen rajoittamaa aluetta D. Oletetaan, että ainetta ei synny eikä häviä tässä alueessa, aineen häviämättömyyden lain mukaan alueessa D olevan aineen massan muutos voi johtua vain siitä, että ainetta virtaa sama määrä pinnan S läpi.

Pisteessä (x, y, z) olevassa tilavuusalkiossa dV hetkellä t olevan aineen massa on

$$dm(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t)dV,$$

jossa $\rho(x, y, z, t)$ on aineen tiheys. Koko alueessa oleva massa on silloin $M(t) = \iiint_D \rho dV$. Massan määrä muuttuu nopeudella

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \rho dV = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Olkoon $\vec{v}(x,y,z,t)$ aineen nopeuskenttä. Aikaisemmin totesimme (vrt. s. 69), että pisteessä (x,y,z) olevan pinta-alkion läpi aikavälillä $(t, t+dt)$ virtaavan aineen massa on

$$dm' = \rho\vec{v}\cdot\hat{N}dSdt$$

eli koko pinnan S läpi ulospäin virtaavan aineen massa aikayksikössä on

$$\frac{dM'}{dt} = \oiint_S \rho\vec{v}\cdot\hat{N}dS.$$

Gaussin kaavan mukaan tämä voidaan esittää tilavuus-integraalina

$$\frac{dM'}{dt} = \iiint_D \nabla\cdot(\rho\vec{v})dV.$$

Koska ulosvirtaava aine pienentää massan määrää alueen sisällä, on

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{dM'}{dt}$$

eli

$$\iiint_D \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right) dV = 0.$$

Tämä pätee kaikille aineessa oleville alueille D¸epsilonin kokoisillekin. Se tarkoittaa, että integrandin pitää hävitä kaikkialla aineessa (kun oletamme, että fysikaaliset suureet ρ ja $\vec{v}$ ovat jatkuvia) eli voimassa on **jatkuvuusyhtälö**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0.$$

Jos aine on kokoonpuristumatonta, silloin $\rho(x,y,z,t) = \text{vakio}$ ja jatkuvuusyhtälöllä on yksinkertainen muoto:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

***

Gaussin teoreemasta voidaan johtaa seuraavat kaksi muuta teoreemaa:

$$\iiint_D \nabla \times \vec{F} dV = -\oiint_S \vec{F} \times \hat{N} dS,$$
$$\iiint_D \nabla \phi dV = \oiint_S \phi \hat{N} dS,$$

jossa $\vec{F}$ on vektorikenttä ja ϕ skalaarikenttä, molemmat tietenkin hyvätapaisia. Nämä voidaan johtaa soveltamalla Gaussin teoreemaa vektoreihin $\vec{F} \times \vec{c}$ ja $\phi \vec{c}$, joissa $\vec{c}$ on mikä tahansa vakiovektori.

Esimerkiksi ensimmäisen kaava voidaan todistaa käyttämällä identiteettejä (ks. s. 37)

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{c}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{c} - \vec{F} \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{c})}_{=0} = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{c},$$
$$(\vec{F} \times \vec{c}) \cdot \hat{N} = (\hat{N} \times \vec{F}) \cdot \vec{c} = -(\vec{F} \times \hat{N}) \cdot \vec{c}.$$

Todistus: Olkoon $\vec{c}$ mikä tahansa vektori. Yllä annettuja identitteettejä käyttäen saamme

$$
\begin{aligned}
&\left(\iiint\limits_D \nabla \times \vec{F} dV + \oiint\limits_S \vec{F} \times \hat{N} dS \right) \cdot \vec{c} \\
&\qquad = \iiint\limits_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{c} dV - \oiint\limits_S (\vec{F} \times \vec{c}) \cdot \hat{N} dS \\
&\qquad = \iiint\limits_D \nabla (\vec{F} \times \vec{c}) dV - \oiint\limits_S (\vec{F} \times \vec{c}) \cdot \hat{N} dS \\
&\qquad = 0 \quad \text{Gaussin lain perusteella.}
\end{aligned}
$$

Koska $\vec{c}$ on mielivaltainen vektori, yhtälö pitää paikkansa vain, jos ensimmäisen rivin sulkulauseke on nolla. ■

Jälkimmäisen kaavan johto jätetään harjoitustehtäväksi.