VEKTORIANALYYSI

Luento 13

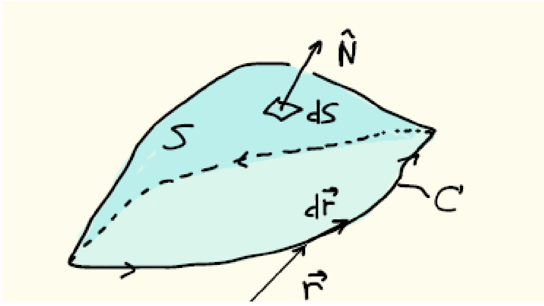
9. Stokesin lause

A 16.5

Stokesin lause on kuin Gaussin lause, mutta yhtä dimensiota alempana: se liittää toisiinsa kentän derivaatasta pinnan yli otetun integraalin ja pinnan reunakäyrää pitkin otetun kentän viivaintegraalin.

Stokesin lause:

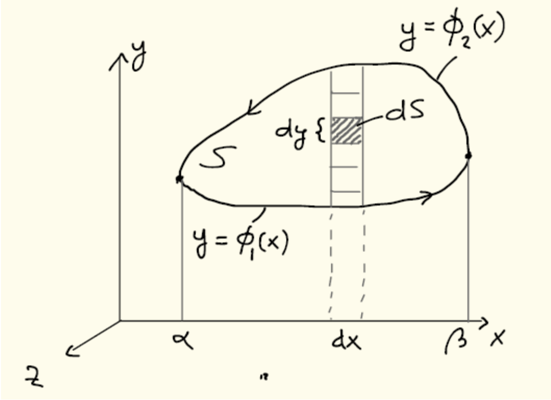
Olkoon $\hat{N}$ pinnan S positiivinen normaali, C pinnan positiivisesti suunnistettu reunakäyrä ja $\vec{F}$ vektorikenttä (riittävästi derivoituva). Silloin



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{N} dS.$$

Todistus: Johdetaan tulos ensin tapauksessa, jossa alueen rajakäyrä on tasokäyrä, ja yleistetään sitten. Pinta itse ei ole välttämättä tasopinta.

Oletetaan, että alueen S reunakäyrä C on säännöllinen y-suunnassa. Käyrän yläosan (ks. kuva) yhtälö olkoon $y = \phi_2(x)$ ja alaosan yhtälö $y = \phi_1(x)$. Jaetaan alue dx:n levyisiin kaistoihin ja nämä edelleen pinta-alkioihin $dS = dxdy$.



Käyrällä C oleva viiva-alkio $d\vec{r}$ on komponenttimuodossa

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}.$$

Käyräintegraali on silloin

$$\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{F} = \oint_C dx\,\hat{i}\cdot\vec{F} + \oint_C dy\,\hat{j}\cdot\vec{F}.$$

Lasketaan ensin ensimmäinen termi:

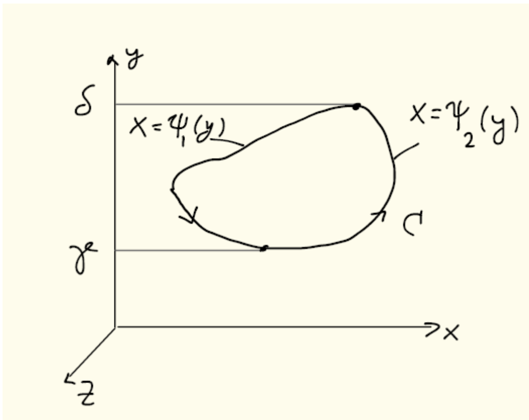
$$\oint_C dx\,\hat{i}\cdot\vec{F} = \underset{\text{yläkäyrä}}{\int_\beta^\alpha} dx\,\hat{i}\cdot\vec{F}(x,\phi_2(x)) + \underset{\text{alakäyrä}}{\int_\alpha^\beta} dx\,\hat{i}\cdot\vec{F}(x,\phi_1(x))$$

$$= -\int_\alpha^\beta dx\,\hat{i}\cdot\left[\vec{F}(x,\phi_2) - \vec{F}(x,\phi_1)\right]$$

$$= -\int_\beta^\alpha dx\,\hat{i}\cdot\int_{y=\phi_1}^{\phi_2} dy\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} = -\int_\alpha^\beta\int_{\phi_1}^{\phi_2} dxdy\,\hat{i}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}$$

$$= -\iint_S dS\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\vec{F}.$$

Jälkimmäinen termi voidaan laskea samaan tapaan, mutta koska reunakäyrä on suunnistettu määrätyllä tavalla, tilanne ei ole *xy*-symmetrinen. Yläkäyrää $x = \psi_2(y)$ pitkin integroitaessa muuttuja (*y*) nyt kasvaa, kun se edellä pieneni. Tämän seurauksena lopputuloksen miinusmerkki vaihtuu nyt plusmerkiksi:



$$\oint_C dx\,\hat{j}\cdot\vec{F} = \underset{\text{yläkäyrä}}{\int_\gamma^\delta} dy\,\hat{j}\cdot\vec{F}(\psi_2(y),y) + \underset{\text{alakäyrä}}{\int_\delta^\gamma} dy\,\hat{j}\cdot\vec{F}(\psi_1(y),y)$$

$$= +\int_\gamma^\delta dy\,\hat{j}\cdot\left[\vec{F}(\psi_2(y),y) - \vec{F}(\psi_1(y),y)\right]$$

$$= +\int_\gamma^\delta dy\,\hat{j}\cdot\int_{y=\psi_1}^{\psi_2} dx\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} = +\int_{\psi_1}^{\psi_2}\int_\gamma^\delta dxdy\,\hat{j}\cdot\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}$$

$$= +\iint_S dS\left(\hat{j}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\vec{F}.$$

Saamme siis yhteensä

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S dS\left[-\hat{i}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial x}\right]\cdot\vec{F}.$$

Stokesin teoreema seuraa tästä (tässä yksinkertaisessa tapauksessa), kun toteamme että

$$\hat{k}\times\nabla = \hat{k}\times\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

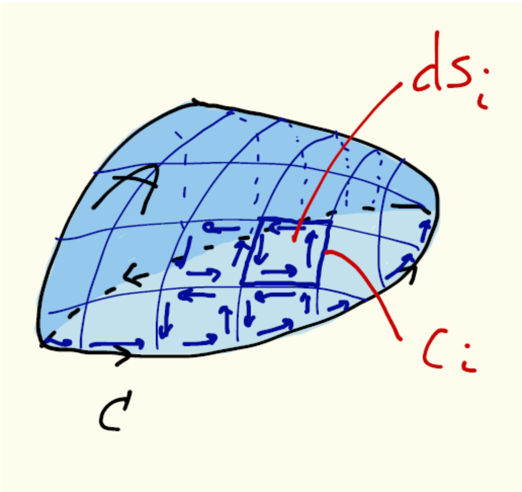
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{j}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{i}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Saamme nimittäin

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S dS\left[-\hat{i}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial x}\right]\cdot\vec{F}$$
$$=\iint_S dS(\hat{k}\times\nabla)\cdot\vec{F} = \iint_S (\underbrace{\hat{k}dS}_{=d\vec{S}})\times\nabla\cdot\vec{F}$$
$$=\iint_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}),$$

jossa pinta-alkiovektorin $d\vec{S}$ suunta ($=\hat{k}$) määräytyy reunakäyrän suunnistuksesta.

Yleistetään nyt tarkastelu. Oletetaan, että C on mielivaltainen sulkeutuva käyrä – ei siis välttämättä tasokäyrä – ja S sen jostakin käyrästä pinnasta rajaama osa. Jaetaan pinta alkioihin, jotka ovat niin pieniä, että niitä voi pitää tasopintoina (raja-arvomielessä). Lasketaan $\vec{F}$:n viivaintegraali kunkin pienen alueen reunaa pitkin. Kahden vierekkäisen alkioalueen yhteisellä rajakäyrällä integraalit ovat yhtä suuret, mutta ne ovat vastakkaismerkkiset, koska kiertosuunnat ovat vastakkaiset. Jos siis lasketaan yhteen kaikkien pikkualueiden reunojen yli otetut viivaintegraali, jäljelle jää vain koko alueen reunakäyrän yli otettu viivaintegraali (ks. kuva). Siis



$$\oint_{c_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{c_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \ldots = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Sovelletaan kuhunkin alkioon edellä saatua tulosta (i = 1,2,…)

$$\oint_{c_i}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{s_i} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}),$$

joten

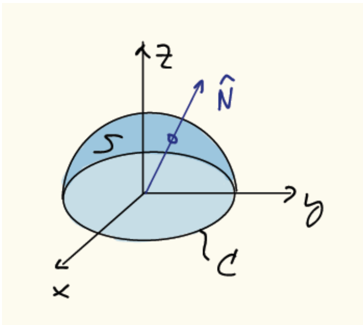
$$\oint_{c_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{c_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \ldots$$
$$= \iint_{s_1} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}) + \iint_{s_2} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}) + \ldots$$

Pienten alueiden yli otettujen pintaintegraalien summa on tietenkin sama k

$$\oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{c_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{c_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \ldots$$
$$= \iint_{s_1} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}) + \iint_{s_2} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}) + \ldots$$
$$= \iint_{S} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}).$$

Huomaa, että sama reunakäyrä C voi rajoittaa monia eri pintoja S. Kaikilla näiden pintojen yli otetuilla integraaleilla $\iint_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F})$ on Stokesin teoreeman mukaan sama arvo, $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Esimerkki: Olkoon $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ ja pinta S on yksikköpallon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yläpuolikas ($z \geq 0$). Alueen reunakäyrä C on xy-tasossa oleva yksikköympyrä. Osoitetaan, että Stokesin teoreema pätee, laskemalla pintaintegraali että käyräintegraali erikseen.



Ensin pintaintegraali. Suunnistetaan pinta niin, että yksikkönormaali on paikkavektorin suuntainen yksikkövektori (paikkavektori on kohtisuorassa pallon pintaa vastaan)

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}_{\substack{=1 \\ \text{pallon pinnalla}}}} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,.$$

Koska

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k},$$

saamme

$$\iint_S d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \iint_S dS\ \hat{r} \cdot (\nabla \times \vec{F})$$
$$= \iint_S dS (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$
$$= \iint_S dS (x + y + z).$$

Huomataan, että intergoimisalue on symmetrinen origon suhteen ja integrandin osa $x + y$ on pariton funktio, joten integraalista vain z-osa voi antaa nollasta poikkeavan tuloksen. Lasketaan se pallokoordinaatteja käyttäen (huom. $r = 1$):

$$\iint_S dS\ z = \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \underbrace{(1 \cdot \cos\theta)}_{= z}$$
$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \Big[\sin^2\theta \Big]_0^{\pi/2}$$
$$= \pi.$$

Sitten käyräintegraali. Reunakäyrä on *xy*-tasossa, joten käyrällä

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}.$$

Niinpä

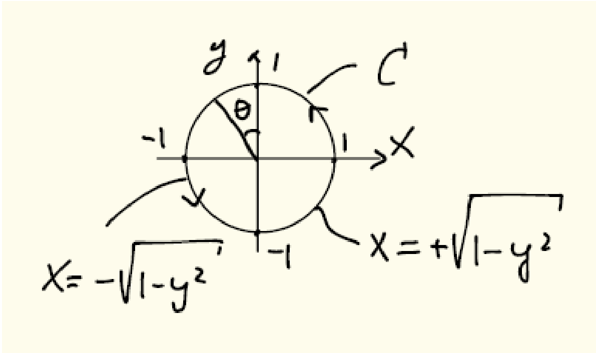
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C (z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k})\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j})$$

$$= \oint_C (\underbrace{z}_{=0}\,dx + xdy) = \oint_C xdy$$

$$= \int_{-1}^{+1} dy(+\sqrt{1-y^2}) + \int_{+1}^{-1} dy(-\sqrt{1-y^2})$$

$$= 2\int_{-1}^{+1} dy\sqrt{1-y^2} = 2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi.$$



Huomaa, että pinnan suunnistus vastaa sitä, että reunakäyrää kierretään *xy*-tasossa vastapäivään. Tämä on huomioitu yllä *y*-integrointien integroimissuunnissa.

Tulos on sama kuin integraali $\iint_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F})$, joten Stokesin teoreema toimii.

Huom. Jos haluat varmistaa itsellesi *y*-integroinnin tuloksen, voit tehdä sen vaikka napakoordinaattien avulla $(r=1, y=\cos\theta)$:

$$I = \int_{-1}^{+1} dy\sqrt{1-y^2} = \int_{\pi}^{0} (\underbrace{-\sin\theta d\theta}_{=dy})\underbrace{\sin\theta}_{=\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \underbrace{\left[\cos\theta\sin\theta\right]_{\pi}^{0}}_{=0} - \int_{\pi}^{0} d\theta\cos^2\theta$$

$$= -\left(\int_{\pi}^{0} d\theta - \int_{\pi}^{0} d\theta\sin^2\theta\right) = -\left[\theta\right]_{\pi}^{0} - I$$

$$= \pi - I$$

eli

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

***

Greenin teoreema

Kun todistimme Stokesin teoreemaa, oletimme aluksi, että reunakäyrä C on xy-tason tasokäyrä, jolloin saimme (ks. s. 93)

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S dS\left[-\hat{i}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial x}\right]\cdot\vec{F}.$$

Silloin emme olettaneet pinnasta S mitään, se oli jokin kolmiulotteisessa avaruudessa oleva pinta. Oletetaan nyt, että pinta on tasopinta eli käyrän C rajoittama alue xy-tasossa. Silloin

$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ ja $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$, joten Stokesin lause saa muodon

$$\oint_C \left(F_x dx + F_y dy\right) = \iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dS.$$

Tämä on *Greenin teoreema*.

Vektorikentän konservatiivisuus ja pyörteettömyys

Tarkastellaan seuraavaa joukkoa vektorikentän $\vec{F}$ ominaisuuksia.

(a) Kenttä $\vec{F}$ on pyörteetön, jos

$$\nabla \times \vec{F} = 0.$$

(b) Stokesin teoreeman perusteella päättelemme, että pyörteettömän kentän käyräintegraali suljetun käyrän yli on nolla:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$$

(c) Tästä puolestaan seuraa konservatiivisia kenttiä koskeva tuttu tulos, että konservatiivisen kentän käyräintegraali kahden pisteen välillä on sama kaikkia reittejä pitkin. (ks. s. 17)

(d) Edelleen pitää paikkansa, että $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ voidaan esittää skalaarifunktion differentiaalina. Jos nimittäin määritellään skalaarifunktio $\phi(x, y, z)$ seuraavasti,

$$\phi(x, y, z) = \int_0^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

voimme kirjoittaa $\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\phi,$ sillä silloin

$$\int_0^{(x,y,z)} d\phi = [\phi]_0^{(x,y,z)} = \phi(x, y, z) - \phi(0) = \phi(x, y, z)$$
$$= \int_0^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(e) Tästä puolestaan seuraa, että $\vec{F}$ voidaan esittää gradienttina skalaarifunktiosta. Nimittäin

$$
\begin{aligned}
d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \\
&= \nabla \phi \cdot d\vec{r}.
\end{aligned}
$$

Toisaalta oli $\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\phi,$ joten $\vec{F} = \nabla \phi.$ Tällaista vektorikenttää sanotaan *konservatiiviseksi*.

Jos kentällä $\vec{F}$ on ominaisuus (e), sillä on myös ominaisuus (a), sillä konservatiivinen kenttä on välttämättä pyörteetön:

$$
\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} = 0
$$

derivointijärjestyksen vaihdannaisuuden perusteella.

Ominaisuudet (a),…,(e) seuraavat toinen toisistaan eli jos oletamme vektorikentällä olevan mikä tahansa näistä ominaisuuksista, sillä on ne kaikki.

Huom. Ylläolevat tulokset pätevät sillä oletuksella, että alue, jossa tarkastelut suoritetaan, on yhtenäinen. Alue on (yhdesti) yhtenäinen, jos mikä tahansa alueen suljettu käyrä voidaan kutistaa jatkuvin muodonmuutoksin pisteeksi. Esimerkiksi tasoalueen keskellä oleva reikä tekee alueesta epäyhtenäisen: reikää kiertävää suljettua käyrää ei voi kutistaa pisteeksi, koska reikä jää aina käyrän sisälle. Samoin on tooruksen eli rinkelin muotinen alue epäyhtenäinen.Onton pallon kuori on sen sijaan yhtenäinen.

Lähteetön kenttä ja vektoripotentiaali

Ilman johtoa toteamme seuraavat vektorikentän yhtäpitävät ominaisuudet jossakin alueessa G:

(a) Vektorikentän vuo kaikkien redusoituvien (jatkuvalla muutoksella pisteeksi kutistuvien) umpinaisten pintojen häviää:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

(b) Vektorikentän divergessi häviää kaikkialla G:ssä:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0.$$

Tällaisen kentän sanotaan olevan *lähteetön*.

(c) Vektorikentällä on vektoripotentiaali $\vec{A}$ siten, että

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A}.$$