VEKTORIANALYYSI

FYSA114 (3 op), kevät 2014

Luennoitsija: Jukka Maalampi
Luennot: 5.3. - 5.5. , ma 9-10 ja ke 12-14. Luentoja ei ole viikoilla 16 ja 17 eli 14. – 27.4.

Harjoitusassistentti: Ville Kotimäki
Laskuharjoitukset: 7 harjoituskertaa (ke), max 12 p
Ex tempore –harjoitukset: 14 kertaa (ma + ke luennon toinen tunti), max 12 p

Tentti: pe 9.5. klo 12.00-16.00 (tentti 1) tai pe 30.5. klo 12.00-16.00 (tentti 2).

Oletetut esitiedot: FYSP111 ja FYSP112. Matematiikan perusopintokurssit eivät ole haitaksi.

Kirja: Adams & Essex, Calculus – a complete course (8th edition). Luennot seuraavat tätä kirjaa, mutta eivät orjallisesti.

Koppa: Luentomuistiinpanot ja tehtävät ilmestyvät koppaan:
https://korppi.jyu.fi/kotka/course/student/generalCourseInfo.jsp?course=150066

Kurssin tavoitteet

Kurssilla käsitellään paikka-avaruudessa määriteltyjen funktioiden eli kenttien differentiaali- ja integraalilaskentaan, keskittyen vektoriarvoisiin kenttiin. Esimerkkejä fysiikassa käytetyistä vektorikentistä ovat sähkökenttä, gravitaatiokenttä ja virtaavan nesteen nopeuskenttä.

Opittavilla menetelmillä selvitään fysiikan aineopintokursseilla ja useimmilla syventävillä kursseilla. Asioita ei käsitellä matemaatikon pedanttisuudella (vrt. matematiikan aineopintokurssit) vaan fyysikon pragmaattisempaa otetta soveltaen. Jotkut kurssilla käsiteltävistä asioista käydään perusteellisemmin läpi elektrodynamiikan erikoiskurssilla.

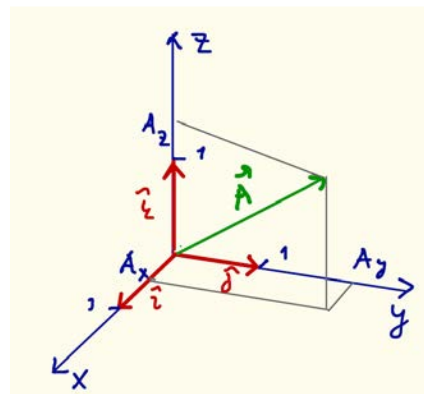
Adamsin kirja on luennoitsijalle uusi tuttavuus, josta voi aiheutua joitain merkinnällisiä konflikteja ja myös eroja asioiden esittämisjärjestyksessä. Itse asia tietenkin pysyy samana.

1. Kertausta

A 10.2 & 10.3

Jos vektorin $\vec{A}$ alkupää on origossa, sen loppupään koordinaatit A_x, A_y, A_z kertovat vektorista kaiken. Voidaan siis samaistaa $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$.

Koordinaattiakseleiden suuntaisten yksikkövektoreiden $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ avulla vektori $\vec{A}$ voidaan esittää muodossa



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}.$$

Kahden vektorin summa on

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \\ &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}.\end{aligned}$$

Vektoreiden *pistetulo* eli skalaaritulo määritellään

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Vektorin *pituus* on

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}.$$

Jos vektoreiden $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ välinen kulma on θ, on

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta.$$

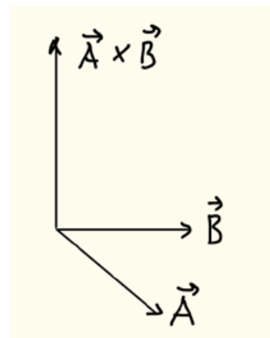
Jos vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden pistetulo häviää eli $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$.

Vektoreiden *ristitulo* $\vec{A}\times\vec{B}$ on vektori, jolle pätee

i) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{A}=0$ ja $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{B}=0$ eli se on kohtisuorassa molempia osiaan vastaan,

ii) $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$.

iii) Vektorit $\vec{A}$, $\vec{B}$ ja $\vec{A}\times\vec{B}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.



Ristitulo voidaan esittää determinanttina:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\hat{i}+\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ B_z & B_x\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}.$$

Tästä näkee, että $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$.

Kantavektoreille $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ pätee

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}.$$

Origosta pisteeseen $P=(x,y,z)$ piirrettyä vektoria sanotaan *paikkavektoriksi* $\vec{r}$. Komponenttimuodossa se on

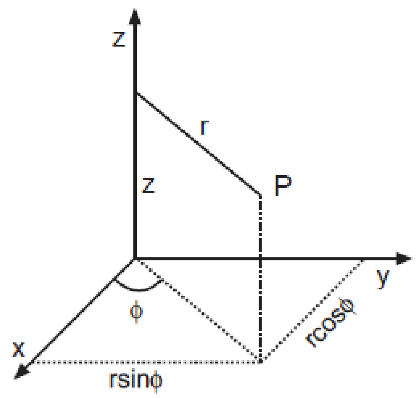
$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}.$$

Paikkavektorin pituus on $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Avaruuden piste voidaan esittää myös muiden kuin suorakulmaisten koordinaattien *x, y, z* avulla. *Sylinterikoordinaatistossa* koordinaatteina ovat *r* (sylinterin säde, merkitään joskus ρ), ϕ (napakulma) ja *z*:

$$x=r\cos\phi,$$
$$y=r\sin\phi,$$
$$z=z.$$

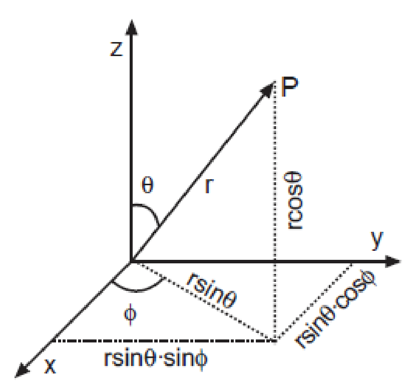
$(r=\sqrt{x^2+y^2}\ )$



Pallokoordinaatistossa koordinaatteina ovat *r* (pisteen etäisyys origosta), ϕ (atsimuuttikulma) ja θ (polaarikulma):

$$x=r\sin\theta\cos\phi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\phi,$$
$$z=r\cos\theta.$$

$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ )$



2. Vektorin derivaatta
A 11.1

Vektorin derivoiminen ajan suhteen on mekaniikasta tuttu asia. Vektori voi olla esimerkiksi nopeusvektori $\vec{v}(t)$,

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}.$$

Nopeus on yhden muuttujan (aika) vektoriarvoinen (kolme komponenttia) funktio. Huomaa, että karteesisen koordinaatiston kantavektorit $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ eivät riipu ajasta, ne ovat aina samaan suuntaan osoittavia vakiovektoreita. Ainoastaan vektorin komponentit ovat ajasta riippuvia. Vektorin $\vec{v}(t)$ derivaatta on siten

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k} \\ &= v'_x(t)\hat{i} + v'_y(t)\hat{j} + v'_z(t)\hat{k}.\end{aligned}$$

Tämä on hiukkasen kiihtyvyys, $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$. Koska yleensä $\frac{dv_i}{dt} \neq v_i$, kiihtyvyys $\vec{a}(t)$ ei tavallisesti ole nopeuden $\vec{v}(t)$ suuntainen eikä pituinen.

Nopeus $\vec{v}(t)$ puolestaan saadaan derivoimalla liikkuvan kappaleen ajasta riippuva paikkavektori $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}$$
$$= x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}.$$

Toinen esimerkki. Sähköstatiikassa sähkökenttä $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z)$ on vektorimuuttujasta (paikasta) riippuva vektoriarvoinen funktio (vektorikenttä, kolme lukua). Siihen liittyvä sähköinen potentiaali $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$ on puolestaan vektorimuuttujasta riippuva skalaarifunktio (skalaarikenttä, yksi luku). Sähköopista tiedämme, että sähkökenttä saadaan potentiaalista seuraavalla tavalla derivoimalla:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}\hat{k}.$$

Tässä derivaatat ovat osittaisderivaattoja (*d*:n sijasta käytetään ∂:ta eli ”doota”), joissa derivointi kohdistuu vain yhteen funktion useasta muuttujasta. Dynaamisessa tapauksessa sähkökenttä riippuu paikan lisäksi ajasta eli se on neljän muuttujan funktio, $\vec{E}(x, y, z, t)$. Yhden pistevarauksen tapauksessa potentiaali riippuu symmetrian takia vain yhdestä muuttujasta, paikkavektorin pituudesta $|\vec{r}| = r$.

Tavalliset summan ja tulon derivoimissäännöt pätevät vektoreille:

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(c\vec{u}) = \frac{dc}{dt}\vec{u} + c\frac{d\vec{u}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v} + \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Ristitulon derivoinnissa pitää kuitenkin vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ keskinäinen järjestys säilyttää, koska ristitulo vaihtaa merkkiään kertomisjärjestyksen vaihtuessa.

3. Parametrisoitu käyrä ja käyräintegraali

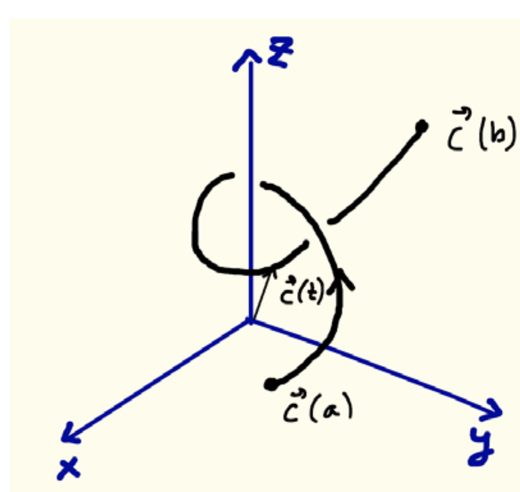
A 8.2 & 10.4

3.1. Käyrän parametrisointi

Olkoon $\vec{c}$ kolmiavaruuden vektori, jonka komponentit riippuvat parametrista *t*,

$$\vec{c}(t) = c_x(t)\hat{i} + c_y(t)\hat{j} + c_z(t)\hat{k}.$$

Parametri *t* ei ole välttämättä aika tai mikään muukaan fysikaalinen suure vaan jokin reaaliluku. Oletetaan, että komponentit $c_i(t)$ ovat jatkuvia, kun *t* saa arvoja $\mathbb{R}^1$:n jollakin välillä [*a*,*b*]. Kun *t*:n annetaan vaihdella tällä välillä, vektorin $\vec{c}(t)$ kärki piirtää $\mathbb{R}^3$-avaruuteen *käyrän.* Käyrän pisteiden koordinaatit ovat



$$(x, y, z) = (c_x(t), c_y(t), c_z(t)), \qquad a \le t \le b.$$

Tätä sanotaan kyseisen käyrän *parametriesitykseksi*. Sama käyrä voidaan esittää muutenkin, esimerkiksi antamalla koordinaatteja toisiinsa sitovat yhtälöt, tai se voi olla vaikka kahden annetun pinnan leikkaus.

Parametriesityksessä käyrään liitetään suunta: voidaan sanoa, että käyrän alkupiste on $\vec{c}(a)$ ja loppupiste $\vec{c}(b)$. Käyrän sanotaan olevan *suunnistettu*.

Käyrä on umpinainen, jos sen alkupiste ja loppupiste ovat samat: $\vec{c}(a) = \vec{c}(b)$. Voi olla, että tällöin sama lenkki on voitu kiertää moneen kertaan ympäri parametrin käydessä läpi arvoalueensa.

***

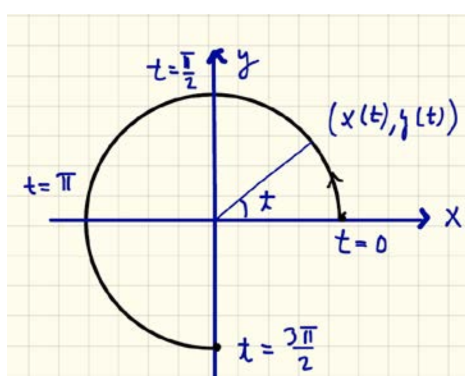
Esimerkki: Tutki (*x*,*y*)-tason käyrää

$$\vec{c}(t) = 2\cos t\,\hat{i} + 2\sin t\,\hat{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi/2.$$

Alkupiste on $\vec{c}(0) = 2\cos 0\,\hat{i} + 2\sin 0\,\hat{j} = 2\,\hat{i}$ eli piste (2,0). Loppupiste on $\vec{c}(3\pi/2) = 2\cos(3\pi/2)\,\hat{i} + 2\sin(3\pi/2)\,\hat{j} = -2\,\hat{j}$ eli piste (0,-2). Koska

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4,$$

käyrän pisteet ovat ympyrän kaarella, jonka säde on 4. Käyrä muodostaa kolme neljäsosaa ympyrän kehästä. Parametrilla *t* on tässä geometrinen merkitys: se on



kulma, jonka verran vektori $\vec{c}(t)$ on kääntynyt alkuasemastaan $\vec{c}(0)$.

Ratkaisemalla *y* saadaan $y = \pm\sqrt{4-x^2}$. Käyrä saadaan siis myös yhdistämällä kahden funktion $y = \sqrt{4-x^2}$ $(-2 \leq x \leq 2)$ ja $y = -\sqrt{4-x^2}$ $(-2 \leq x \leq 0)$ kuvaajat.

Esimerkki: Yksikköympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 1$. On lukemattomia eri tapoja esittää tämä käyrä parametrimuodossa. Tässä muutamia:

$$x = \cos t,\ y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$
$$x = \sin(\alpha^2),\ \ y = \cos(\alpha^2) \quad (0 \leq \alpha \leq \sqrt{2\pi}),$$
$$x = 1 - t^2, \quad y = t\sqrt{2-t^2} \quad (-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}).$$

Esimerkiksi viimeisessä tapauksessa

$$x^2 + y^2 = (1-t^2)^2 + (t\sqrt{2-t^2})^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + 2t^2 - t^4 = 1.$$

Piste (*x,y*) liikkuu arvosta (-1,0) pisteeseen (0,-1) ja siitä edelleen pisteeseen (1,0), kun *t* muuttuu arvosta $-\sqrt{2}$ arvon -1 kautta arvoon 0. Kun *t* muuttuu arvosta 0 arvon 1 kautta arvoon $\sqrt{2}$, piste (*x,y*) liikkuu (0,1):n kautta takaisin arvoon (-1,0).

***

Kun käyrän parametriesityksestä eliminoidaan parametri, saadaan käyrän *karteesinen yhtälö.* Edellisissä esimerkeissä parametri *t* eliminoitui, kun laskettiin komponenttien neliöt yhteen. Yleisesti eliminointi voidaan tehdä niin, että esimerkiksi x:n parametriesityksestä ratkaistaan t x:n funktiona ja sijoitetaan se y:n parametriesitykseen. Tuloksena on yhtälö, joka sitoo x:n ja y:n toisiinsa, eli karteesinen yhtälö.

***

Esimerkki: Käyrän parametriesitys on

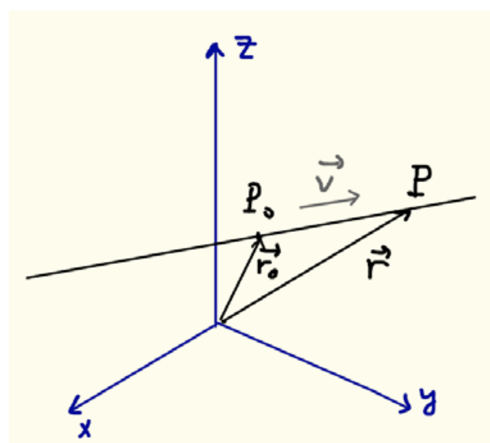
$$x = t + 3, \; y = t^2 - t + 2 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Mistä käyrästä on kyse?

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $t = x - 3$. Sijoitetaan tämä jälkimmäiseen yhtälöön: $y = (x-3)^2 - (x-3) + 2 = x^2 - 7x + 14.$ Tämä on käyrän karteesinen yhtälö, ylös aukeavan paraabelin yhtälö (pohja pisteessä (7/2,7/4)).

***

Suoran esittäminen parametrimuodossa: Oletetaan, että suora kulkee pisteen $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (paikkavektori $\vec{r}_0$) kautta ja on yhdensuuntainen vektorin $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ kanssa. Silloin suoran mielivaltaisen pisteen $P = (x, y, z)$ paikkavektori $\vec{r}$ saadaan lisäämällä vektoriin $\vec{r}_0$ vektori $\vec{v}$ sopivalla reaaliluvulla t kerrottuna (ks. kuva). Näin saadaan suoralle parametriesitys



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \quad (-\infty < t < \infty)$$

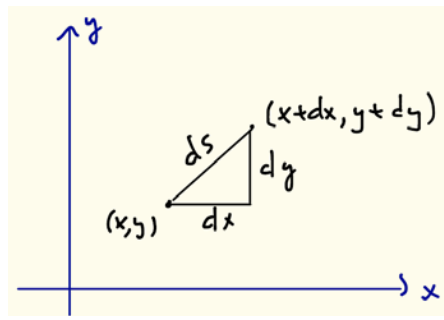
eli komponenttimuodossa

$$x = x_0 + tv_x, \; y = y_0 + tv_y, \; z = z_0 + tv_z.$$

Ratkaisemalla kustakin yhtälöstä *t*, saadaan suoralle karteesinen esitys

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}.$$

3.2. Käyrän pituus



Jos siirrymme tasossa pisteestä (*x,y*) pisteeseen (*x+dx, y+dy*), kuljemme (Pythagoraan lauseen mukaan) matkan $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. Jos kuljemme funktion $y(x)$ kuvaajaa pitkin, on $dy=(dy/dx)dx = y'(x)dx$. Jos lähdemme pisteestä $(x_1, y(x_1))$ ja päädymme pisteeseen $(x_2, y(x_2))$, on kulkemamme kokonaismatka

$$s=\int ds=\int \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Tämän mallin mukaan on helppo kirjoittaa parametrisoidun käyrän pituus ($a\le t\le b$):

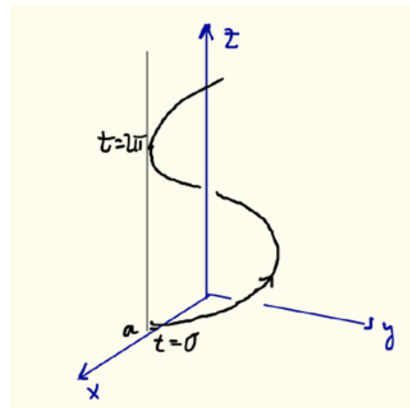
$$s=\int ds=\int \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt,$$

sillä esimerkiksi $dx(t)=\dfrac{dx}{dt}dt=x'(t)dt.$

***

Esimerkki: Lasketaan ruuviviivan

$$x = a\cos t,$$
$$y = a\sin t,$$
$$z = bt$$



käyränpituus yhtä kierrosta ($0 \le t \le 2\pi$) kohti.

Yllä olevaa kaavaa soveltaen saadaan

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\ dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$$
$$= 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

***

3.3. Viivaintegraali

A 15.3

Käyrän pituuden laskeminen on yksi esimerkki *viiva-integraalista*. Sitä yleisempi tilanne on funktion viivaintegraali. Jos funktiona on skalaarikenttä *f(x,y,z)*, tehtävänä on laskea

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt,$$

missä $\mathcal{C}$ on jokin parametrisoitu käyrä. Integraalin arvo ei riipu siitä, miten käyrä on parametrisoitu.

***

Esimerkki: (A, s. 876) Lasketaan viivaintegraali $I = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\,ds$, kun käyrä $\mathcal{C}$ on suora viiva origosta pisteeseen (2,1).

Parametrisoidaan $\mathcal{C}$ seuraavasti: $x = 2t,\ \ y = t,\quad 0 \le t \le 1,$ toisin sanoen

$$\vec{r}(t) = 2t\,\hat{i} + t\,\hat{j},\quad 0 \le t \le 1.$$

Silloin

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \left|2\vec{i} + \vec{j}\right| dt = \sqrt{5}dt.$$

Integraalista saadaan

$$I = \int_0^1 (4t^2 + t^2)\sqrt{5}\,dt = 5\sqrt{5}\int_0^1 t^2 dt = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Jos $\vec{r}\,^*(u)\quad (\alpha \le u \le \beta)$ on jokin toinen $\mathcal{C}$:n parametrisaatio, on

$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}\,^*(u))\left|\frac{d\vec{r}\,^*}{du}\right| du.$$