VEKTORIANALYYSI

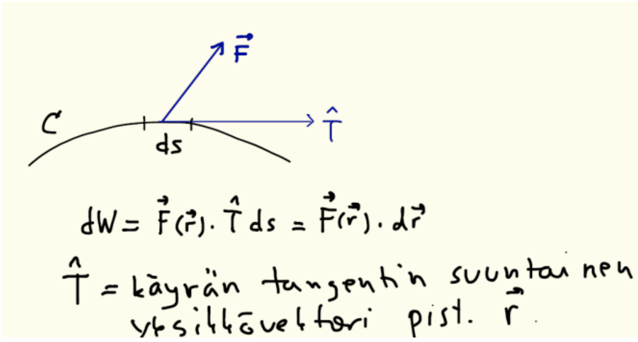
Luento 2

Vektorikentän käyräintegraali

A 15.4

Voiman tekemä työ on matka (d) kertaa voiman (F) projektio liikkeen suunnassa, yksinkertaisimmillaan $W = Fd$. Jos liike tapahtuu käyrää C pitkin ja voima riippuu paikasta, $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z)$, täytyy integroida:

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$
$$= \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$



Tämä on esimerkki vektorikentän viivaintegraalista. Tässä integroinnissa parametrina on matka s ja käyränä $\vec{r}$, käyrän C pisteiden paikkavektori.

Olkoon $\vec{F}(\vec{r})$ yleisemmin jokin vektorikenttä ja $\vec{r}$ jonkin käyrän C pisteiden paikkavektori. Integraalia

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

kutsutaan *vektorin* $\vec{F}$ *käyräintegraaliksi* yli käyrän C. [Ei ole paras mahdollinen nimitys, sillä oikeastaan tässä lasketaan vektorin $\vec{F}$ käyrän C tangentin suuntaisen komponentin $F_T = F\cos\theta$ käyräintegraali, $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C F_T dr$. Perimmältään siis tässäkin on kyse skalaarikentän käyräintegraalista.]

Kun käyrä C esitetään parametrimuodossa eli $\vec{r} = \vec{r}(t)$, on integraali saatettava sellaiseen muotoon, jossa integroiminen tapahtuu parametrin *t* suhteen jonkin välin $a \le t \le b$ yli. Käytetään ketjusääntöä, esim.

$$dx = \frac{dx}{dt} dt,$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left[F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} \right. \\ &\qquad \left. + F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt.\end{aligned}$$

Lyhyemmin kirjoitettuna:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

***

Esimerkki: Lasketaan vektorikentän

$$\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

käyräintegraali yli käyrän

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\sin t, \cos t, t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Sovelletaan äskeistä kaavaa. Koska $x'(t) = \cos t, y'(t) = -\sin t$ ja $z(t) = 1,$ saadaan

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + t\,\hat{k}\right]\cdot\left[\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j} + \hat{k}\right]$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\sin t\cos t - \sin t\cos t + t\right)dt = \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi^2.$$

***

3.3 Käyräintegraali ja vektorikentän konservatiivisuus

A 15.2&15.4

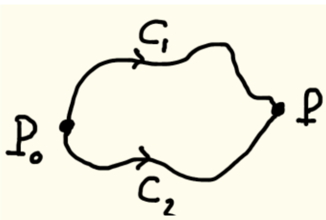
Tarkastellaan vektorikentän käyräintegraalia pitkin *suljettua käyrää* C eli integroinnin alku- ja loppupiste ovat samat, $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Merkitään tätä integraalia

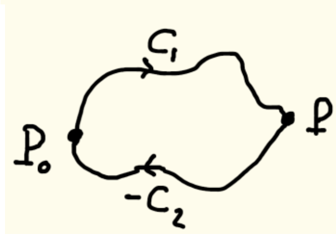
$$\oint_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}.$$

On helppo uskoa, että integraali voi olla nolla, jos vaan käyrä sattuu olemaan sopivanlainen. On kuitenkin olemassa sellaisia vektorikenttiä, joille tämä integraali on nolla *kaikille* suljetuille käyrille,

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 \text{ kaikille suljetuille } C$$

Niitä sanotaan *konservatiivisiksi kentiksi*. Mekaniikasta ovat tuttuja konservatiiviset voimat; ne ovat konservatiivisia vektorikenttiä.





On helppo nähdä, että konservatiivisen kentän käyräintegraali kahden pisteen välillä on reitistä riippumaton. Olkoon C_1 ja C_2 kaksi eri käyrää pisteestä P_0 pisteeseen P. Ne voidaan yhdistää suljetuksi käyräksi C, jossa ensin mennään P_0 pisteeseen P käyrää C_1 pitkin ja palataan takaisin käyrää C_2 väärään suuntaan eli käyrää $-C_2$. Silloin (huomaa, että reiteillä C_2 ja $-C_2$ käyrädifferentiaalilla

$d\vec{r}$ on vastakkainen merkki, koska ne osoittavat vastakkaiseen suuntaan)

$$0 = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{-C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{=-\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}},$$

joten

$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Konservatiivinen vektorikenttä $\vec{F}(\vec{r})$ voidaan aina esittää jonkin skalaarikentän $\phi(\vec{r})$ avulla seuraavasti:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}}_{=F_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}}_{=F_y}\hat{j} + \underbrace{\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}}_{=F_z}\hat{k}.$$

Tämä on konservatiivisen kentän määritelmä. Kaava voidaan kirjoittaa lyhyemmin määrittelemällä derivointioperaattori $\vec{\nabla}$ eli nabla:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Silloin $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$. Nabla hyvin tulee tutuksi jatkossa. [Huom. Fysiikassa usein valitaan potentiaalin etumerkki niin, että $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, mutta se on ihan sama.]

Integrandi saadaan skalaarikentän avulla muotoon

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(dx\hat{\imath}+dy\hat{\jmath}+dz\hat{k}\right)$$
$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=d\phi.$$

Jos reitillä C on parametriesitys $\vec{r}(t)$ $(a\le t\le b)$, on käyräintegraali

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b d\phi(\vec{r}(t))=\int_a^b\frac{d\phi(\vec{r}(t))}{dt}dt=\phi(\vec{r}(b))-\phi(\vec{r}(a)),$$

eli käyräintegraalin arvon määräävät potentiaalifunktion arvot käyrän päätepisteissä. Kun käyrä on suljettu, $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$ ja käyräintegraali häviää.

Seuraavat kolme ehtoa ovat yhtäpitäviä eli seuraavat toinen toisistaan (ks. Adams puutuvien todistusten osalta):

(i) $\vec{F}$ on konservatiivinen eli on muotoa $\vec{F}=\nabla\phi.$

(ii) $\oint_C\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=0$ kaikille suljetuille käyrille C.

(iii) Käyräintegraali pisteestä P_0 pisteeseen P ei riipu käyrästä, jota pitkin integrointi suoritetaan eli $\int_{\vec{r}(P_0)}^{\vec{r}(P)}\vec{F}\cdot d\vec{r}\frac{1}{2}$ ei riipu käyrästä C.

***

Esimerkki: Tarkastellaan vektorikenttää

$$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=(x+y,x+z,y).$$

Onko kenttä konservatiivinen? Mikä on kentän käyräintegraali $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$ origosta (0,0,0) pisteeseen (0,1,1)?

Yksi tapa osoittaa kenttä konservatiiviseksi on etsiä sellainen skalaarifunktio ϕ, josta se saadaan nablaamalla eli $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi.$ Hetken pohtimisella näkee, että sellainen on

$$\phi(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy + yz.$$

Esimerkiksi $\partial\phi/\partial x = x + y = F_x$. Kenttä on siis konservatiivinen.

Käyräintegraalin arvoksi saadaan

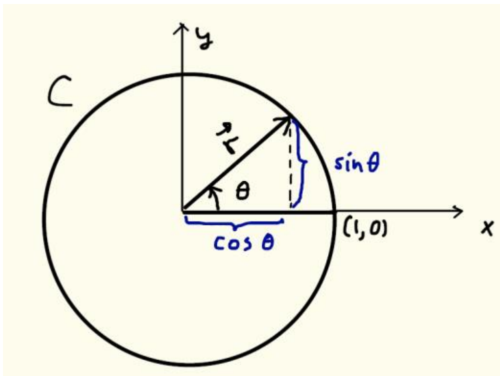
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(0,1,1) - \phi(0,0,0)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}(0)^2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1\right)\left(\tfrac{1}{2}(0)^2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0\right) = 1.$$

***

Esimerkki: Laske integraali $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, kun C on ympyrä $x^2 + y^2 = 1$ kierrettynä vastapäivään alku- ja loppupisteenä (1,0) ja $\vec{F}$ on vektorikenttä

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Onko kenttä konservatiivinen?



Laskua yksinkertaistava huomio: koska integroimiskäyrällä $x^2 + y^2 = 1$, on kenttä sillä $\vec{F} = (-y, x)$. Parametrisoidaan käyrä kiertokulman avulla: $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$. Silloin $\vec{F} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ ja käyräintegraaliksi saadaan

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot\vec{r}\,'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(-\sin\theta, \cos\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi.$$

Koska tämä integraali yli suljetun käyrän ei häviä, kenttä ei ole konservatiivinen.

***

Pyörteettömyysehto. Riittävä ja välttämätön ehto vektorikentän $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ konservatiivisuudelle ja siten skalaaripotentiaalin olemassaololle on myös seuraava:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Tämä ehto voidaan kirjoittaa edellä annetun ∇-operaattorin avulla yksinkertaisesti

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = 0,$$

sillä $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$ tarkoittaa vektoria

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Vektorikenttää $\vec{F}$, jolle $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = 0$, sanotaan pyörteettömäksi (asiaan palataan myöhemmin). Kaksiulotteisessa tapauksessa pyörteettömyysehto on

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

***

Esimerkki: Edellä olleessa tehtävässä kysyttiin, onko kenttä $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (x + y, x + z, y)$ konservatiivinen.

Yllä annetut ehdot toteutuvat,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0,$$

joten kenttä on konservatiivinen.

***

Esimerkki: Fysiikassa potentiaalia merkitään usein kirjaimella U ja konservatiivinen voima $\vec{F}$ esitetään muodossa

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}.$$

Yhdessä ulottuvuudessa jousivoiman potentiaali(energia) on $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, josta jousivoimaksi saadaan $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} = -kx\hat{i}$.

***