4. Derivointi useammassa ulottuvuudessa

A 12.3

Osittaisderivaatta. Kerrataan aluksi osittaisderivaatan käsite. Funktio $f = f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ on kolmen muuttujan funktio, jonka arvo yleensä muuttuu, kun mikä tahansa muuttujista muuttuu. Osittaisderivaatta kuvaa sitä, miten yhden muuttujan muuttaminen vaikuttaa funktioon, kun muut muuttujat pysyvät muuttumattomina:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}.$$

Näille käytetään usein merkintää

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \partial_z .$$

(Adamsin merkintä $\partial f / \partial x = f_1$ jne. on sikäli huono, että sen saattaa sekoittaa vektorin komponenttiin.)

***

Esimerkki: Lasketaan skalaarikentän

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 + x^4 y + y^4$$

osittaisderivaatat.

$$\partial_x f = 3x^2 y^2 + 4x^3 y, \quad \partial_y f = 2x^3 y + x^4 + 4y^3, \quad \partial_z f = 0.$$

***

Esimerkki: Ketjusääntö pätee myös osittaisderivointiin. Olkoon $f = f(g(x,y))$, missä $f(g) = \sin g$ ja $g(x,y) = x^2 y$. Toisin sanoen, $f = \sin(x^2 y)$. Osittaisderivaatat ovat

$$\partial_x f(g(x,y)) = \frac{df(g)}{dg}\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = (\cos g)(2xy) = 2xy\cos(x^2 y),$$
$$\partial_y f(g(x,y)) = \frac{df(g)}{dg}\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = (\cos g)(x^2) = x^2\cos(x^2 y).$$

***

Gradientti ∇f

A 16.1

Skalaarikentälle $f = f(x,y,z)$ voidaan määritellä "derivaatta", joka kuvaa sen muuttumista, kun piste (x,y,z) muuttuu. Tätä kutsutaan *gradientiksi* ja määritellään

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}.$$

Gradientti ∇f on siis vektori, jonka komponentteina ovat funktion f osittaisderivaatat eli $\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$. Symboli ∇ eli nabla tarkoittaa derivaattaoperaattoria

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.$$

Joskus gradientista käytetään myös merkintää $\nabla f = \text{grad} f$. Jotkut lisäävät nablan päälle nuolen, ettei sen vektoriluonne unohtuisi, siis $\vec{\nabla} f$.

Kaksiulotteisessa tapauksessa ((x, y)-taso) gradientti on

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}.$$

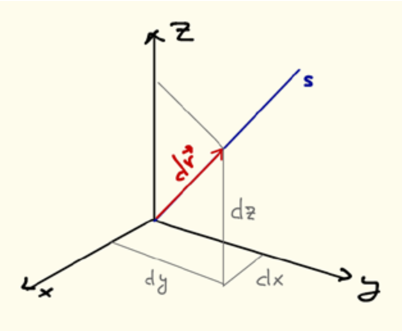
***

Esimerkki: Funktion $f(x, y, z) = xy + z$ gradientti on

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}(xy+z)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xy+z)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(xy+z)\hat{k}$$
$$= y\hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}.$$

***

Gradientti ∇f on vektori. Mikä merkitys sen suunnalla on? Origosta lähtevä puolisuora S määrittää jonkin (x, y, z) -avaruuden suunnan.

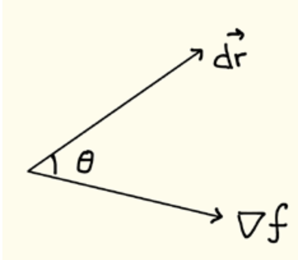


Olkoon $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ tähän suuntaan osoittava paikkavektorin muutos. Silloin

$$\nabla f \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$= df$$
$= f$:n kokonaisdifferentiaali.

Tämä tulos eli

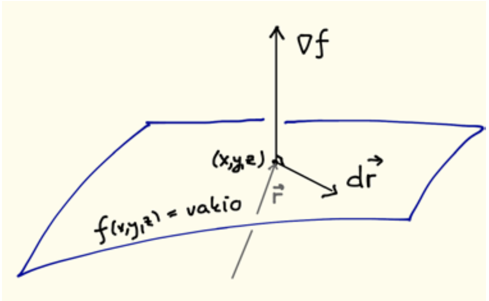
$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$



kertoo, että *funktio f kasvaa nopeiten gradienttinsa suunnassa*. Silloin nimittäin

$$\nabla f \cdot d\vec{r} = |\nabla f||d\vec{r}|\cos\theta = |\nabla f||d\vec{r}|.$$

Kun piste $\vec{r} = (x, y, z)$ liikkuu avaruudessa niin, että sen muutos $d\vec{r}$ on aina kohtisuorassa gradienttia ∇f vastaan, funktion *f* arvo ei muutu eli $df = 0.$ Piste piirtää avaruuteen pinnan, jossa $f(x, y, z) =$ vakio, niin sanotun *tasa-arvopinnan* (kaksiulotteisessa tapauksessa tasa-arvokäyrän). Gradientti ∇f on tasa-arvopinnan normaali, joten normaalin suuntainen yksikkövektori $\hat{n}$ on



$$\hat{n} = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

Matemaattinen välisoitto:

Yhden muuttujan funktiota $f(x)$ sanotaan differentioituvaksi pisteessä *x*, jos on olemassa luku $f'(x)$ ja funktio $g(dx)$ siten, että

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx + g(dx),$$

missä $g(dx)/dx \to 0,$ kun $dx \to 0.$

Useamman muuttujan funktion $f = f(x, y, z)$ tapauksessa *f* on differentioituva pisteessä $\vec{r}$, jos osittaisderivaatat

$\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_z f$ ovat olemassa ja on olemassa funktio $g(d\vec{r})$ siten, että

$$f(\vec{r}+d\vec{r})-f(\vec{r})=\nabla f(\vec{r})\cdot d\vec{r}+g(d\vec{r}),$$

missä $g(d\vec{r})/|d\vec{r}|\to 0,$ kun $d\vec{r}\to 0.$

***

Esimerkki (Adamsista): Lasketaan funktion $f(x,y)=x^2+y^2$ gradientti pisteessä (1,2).

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)&=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2+y^2)\\&=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\&=2x\hat{i}+2y\hat{j},\end{aligned}$$

joten $\nabla f(1,2)=2\hat{i}+4\hat{j}$. Pisteessä (1,2) $f(1,2)=5,$ joten vektori $\nabla f(1,2)=2\hat{i}+4\hat{j}$ on funktion f tasa-arvokäyrän $f(x,y)=5$ normaali pisteessä (1,2). Tasa-arvokäyrä on $\sqrt{5}$ -säteinen ympyrä.

***

Esimerkki: R-säteisen pallon yhtälö on

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Merkitään

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$$

Tämän gradientti on

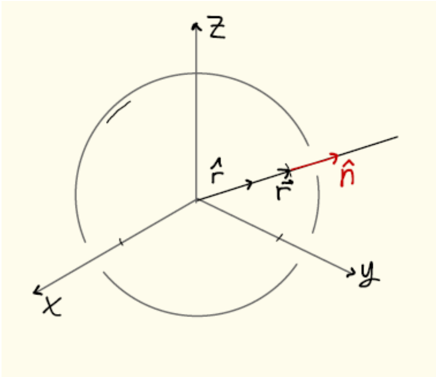
$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)\hat{j}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)\hat{k}$$

$$= 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$$

$$= 2\vec{r}.$$

Pinnan yksikkönormaali ulospäin pisteessä $\vec{r}$ on

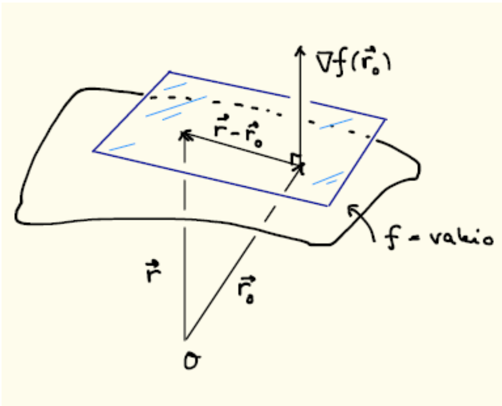


$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \equiv \hat{r}$$

eli paikkavektorin suuntainen yksikkövektori. Pallon pinta on tasa-arvopinta. Siellä $f = R^2 = \text{vakio}$, ja gradientti ∇f on kohtisuorassa pintaa vastaan.

***

Tangenttitason yhtälö. Olkoon $f(x,y,z)$ jokin funktio ja $f(x,y,z) = \text{vakio}$ eräs sen määrittelemä pinta. Olkoon $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ jokin piste tällä pinnalla. Etsitään gradienttia hyväksi käyttäen tähän pisteeseen piirretyn pinnan tangenttitason yhtälö.



Gradientti $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ on pinnan normaalin suuntainen vektori, joten kaikki tangenttitasossa olevat vektorit $\vec{r} - \vec{r}_0$ ovat kohtisuorassa sitä vastaan:

$$\nabla f(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Tämä on tangenttitason yhtälö (saadaan laskettua tästä).

***

Esimerkki: Olkoon $f(x,y,z)=3xy+z^2$. Johdetaan pisteeseen $\vec{r}_0=(1{,}1{,}1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö. Pinta on $f(x,y,z)=3\cdot 1\cdot 1+1^2=4$. Gradientti on $\nabla f(x,y,z)=3y\hat{i}+3x\hat{j}+2z\hat{k}$, joten

$$\nabla f(\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=(3\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(\,(x-1)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+(z-1)\hat{k})$$
$$=3(x-1)+3(y-1)+2(z-1)=3x+3y+2z-8.$$

Tangettitason yhtälö on siten

$$3x+3y+2z=8.$$

***

Suunnattu derivaatta. Joskus on tarpeen tietää, miten funktion $f(x,y,z)$ arvot muuttuvat, kun siirrytään pisteestä $\vec{r}$ jonkin tietyn vektorin $\vec{u}$ suuntaan. Tällöin A 12.7

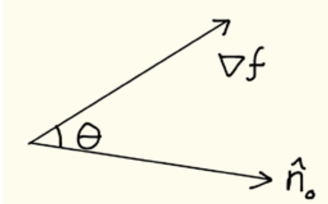
$$d\vec{r}=\left|d\vec{r}\right|\frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}=dr\ \hat{u}\ ,$$

missä $\hat{u}$ on $\vec{u}$:n suuntainen yksikkövektori. Merkitään $dr\equiv du$. Funktion kokonaisdifferentiaaliksi pisteessä $\vec{r}$ saamme

$$df=\nabla f\cdot d\vec{r}=\nabla f\cdot(du\,\hat{u}).$$

Tästä seuraa

$$\frac{df}{du}=\hat{u}\cdot\nabla f=\cos\theta\,\left|\nabla f\right|,$$



jossa θ on gradientin ∇f ja vektorin $\hat{u}$

välinen kulma. Tämä on funktion f *suunnattu derivaatta suuntaan* $\hat{u}_0$. Suunnattua derivaattaa merkitään usein myös

$$D_u f = \hat{u} \cdot \nabla f .$$

Koska $\cos\theta$ on välillä -1 … +1, ovat suunnatun derivaatan arvot välillä $-\left|\nabla f\right| \leq D_u f \leq \left|\nabla f\right|$. Suunnatulla derivaatalla on suurin positiivinen arvo gradientin suunnassa ja suurin negatiivinen arvo vastakkaisessa suunnassa. Kun $\hat{u} \perp \nabla f$, suunnattu derivaatta on nolla.

Suunnattu derivaatta koordinaattiakselin suunnassa on sama kuin osittaisderivaatta, esimerkiksi suunnassa $\hat{u} = \hat{i}$

$$D_{\hat{i}} f = \hat{i} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

***

Esimerkki: Lasketaan funktion $f(x, y) = \dfrac{2x}{1+y^2}$ suunnattu derivaatta vektorin $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$ suuntaan pisteessä (1,1).

Ensin pitää laskea *f*:n gradientti:

$$\nabla f = \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} \right] f = \hat{i}\partial_x \left(\frac{2x}{1+y^2} \right) + \hat{j}\partial_y \left(\frac{2x}{1+y^2} \right)$$

$$= \frac{2}{1+y^2}\hat{i} + \frac{-4xy}{(1+y^2)^2}\hat{j}.$$

Suunnattu derivaatta on

$$D_u f(1,1) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \nabla f = \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot \left(\frac{2}{1+1^2}\hat{i} + \frac{-4 \cdot 1 \cdot 1}{(1+1^2)^2}\hat{j}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Voimme päätellä tästä, että vektori $\vec{u}$ on pisteessä (1,1) funktion tasa-arvopinnan $f = 1$ (funktion arvo pisteessä (1,1) on 1) suuntainen.

***

Esimerkki: Lasketaan funktion

$$f(x, y, z) = x^2 z + y^3 z^2 - xyz$$

suunnattu derivaatta suuntaan $\vec{u} = (-1, 0, 3)$. Mihin suuntaan funktio kasvaa voimakkaimmin ja pienenee voimakkaimmin pisteessä (1,1,1)?

Lasketaan ensin *f*:n gradientti:

$$\nabla f(x, y, z) = (\hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z)(x^2 z + y^3 z^2 - xyz)$$

$$= (2xz - yz)\hat{i} + (3y^2 z^2 - xz)\hat{j} + (x^2 + 2y^3 z - xy)\hat{k}$$

Suunnattu derivaatta on

$$D_u f(x,y,z) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cdot \nabla f$$

$$= \frac{(-1)\hat{i} + 0\cdot\hat{j} + 3\cdot\hat{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2}}\cdot\Big[\ (2xz - yz)\hat{i}$$

$$+ (3y^2z^2 - xz)\hat{j} + (x^2 + 2y^3z - xy)\hat{k}\ \Big]$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{10}})(2xz - yz) + 0\cdot(3y^2z^2 - xz) + (\frac{3}{\sqrt{10}})(x^2 + 2y^3z - xy)$$

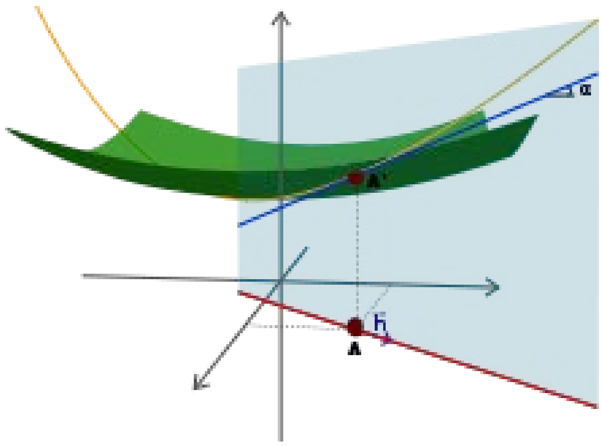
$$= (\frac{1}{\sqrt{10}})(3x^3 + 6y^3z - 3xy - 2xz + yz).$$

On tärkeää muistaa, että suunnatun derivaatan lausekkeessa suuntavektori on yksikkövektori. Tässä esimerkissä suunta oli annettu vektorilla $\vec{u}$, joka ei ole yksikkövektori. Se piti ”normittaa” yksikkövektoriksi eli jakaa pituudellaan.

Funktio kasvaa voimakkaimmin gradientin suuntaan ja pienenee voimakkaimmin tätä vastakkaiseen suuntaan. Pisteessä (1,1,1) gradientti on $\nabla f(1,1,1) = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ eli funktio kasvaa voimakkaimmin vektorin $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ suuntaan ja pienenee voimakkaimmin vektorin $\vec{v} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ suuntaan.

***

Tarkastellaan lopuksi suunnatun derivaatan geometrista merkitystä kuvan avulla. Kuvassa pystyakseli kuvaa funktion $f(x, y)$ arvoja. Kuvaan on piirretty eräs funktion tasa-arvopinta (vihreä). (x, y)-tasoon on piirretty suoran (punainen) muodossa suunta, johon suunnattu derivaatta halutaan laskea. Tämän suoran kautta kulkevan pystysuoran tason ja pinnan leikkaus on em. tasossa oleva käyrä (keltainen). Funktion $f(x, y)$ suunnattu derivaatta (x, y)-tason pisteessä A on vastaavaan kohtaan em. käyrälle piirretyn tangentin (sininen) kulmakerroin.



Se siis kertoo, miten ”jyrkkä” pinta siinä kohtaa on annettuun suuntaan edettäessä.