Divergenssi $\nabla \cdot \vec{F}$

Vektorikentän $\vec{F}(x, y, z)$ divergenssi määritellään

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Divergenssistä käytetään usein myös merkintää div,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \mathrm{div}\vec{F}.$$

Divergenssi $\nabla \cdot \vec{F}$ voidaan ymmärtää kahden vektorin pistetulona,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \right),$$

mutta pitää muistaa, että paitsi vektoriluonteinen olio, ∇ on myös derivaattaoperaattori. Niinpä tavallisten vektoreiden pistetulon ominaisuus $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ ei päde tulolle $\nabla \cdot \vec{F}$, sillä $\vec{F} \cdot \nabla = F_x \dfrac{\partial}{\partial x} + F_y \dfrac{\partial}{\partial y} + F_z \dfrac{\partial}{\partial z}$ ei ole divergenssi, koska siinä ei derivoida $\vec{F}$:ää vaan jotain perässä tulevaa funktiota.

Jos vektori on skalaarin $f(\vec{r})$ ja vektorin $\vec{v}(\vec{r})$ tulo, sen divergenssi on

$$\nabla \cdot (f\,\vec{v}) = (\nabla f) \cdot \vec{v} + f(\nabla \cdot \vec{v}).$$

***

Esimerkki: Paikkavektorin $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ divergenssi on

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3.$$

Huomataan, että paikkavektorin divergessi on kaikkialla sama.

***

Esimerkki: Lasketaan vektorin $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xyz\hat{k}$ divergenssi:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz)$$
$$= 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

***

Esimerkki: Edellisen esimerkin vektori voidaan kirjoittaa skalaarin ja vektorin tulona:
$\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xyz\hat{k} = x(xy\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + yz\hat{k}) \equiv x\vec{G}.$

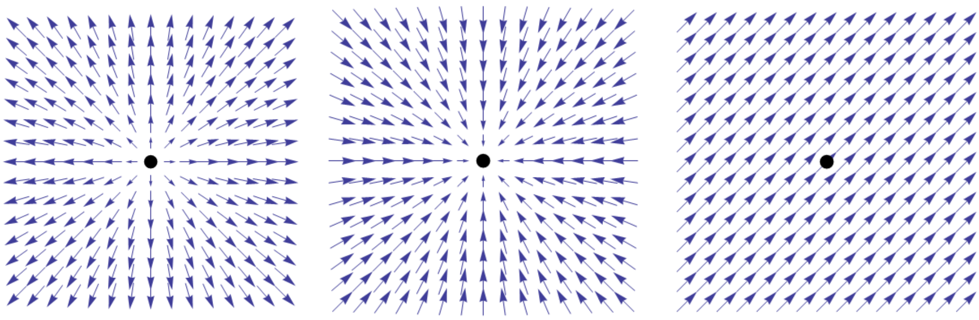
Silloin tulon divergenssin kaavasta saamme

$$\nabla(x\vec{G}) = (\nabla x)\cdot\vec{G} + x(\nabla\cdot\vec{G})$$
$$= \underbrace{\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}x + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}x + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}x\right)}_{=\hat{\imath}}\cdot\left(xy\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + yz\hat{k}\right)$$
$$+ x\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)$$
$$= xy + (xy + 0 + xy) = 3xy. \qquad \text{OK.}$$

***

Divergenssi liittyy fysiikassa mm. vuon laskemiseen. Jos vektori on esimerkiksi nesteen virtaustiheys (tiheys × nopeus $= \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$) jossakin tilavuusalkiossa, kuvaa divergenssi $\nabla \cdot (\rho\vec{v})$ nesteen nettovirtausta ulos tuosta tilavuusalkiosta aikayksikössä eli se on vuontiheys. Jos $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) > 0,$ tilavuusalkion sisällä on lähde, jossa syntyy lisää nestettä, ja jos $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) < 0,$ tilavuusalkion sisällä on nielu, johon nestettä katoaa. Tähän liittyy divergenssistä suomenkielessä käytetty nimitys *lähteisyys*. Jos $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0,$ virtauksen sanotaan olevan kokoonpuristumatonta. (Tähän asiaan palataan myöhemmin pintaintegraalien yhteydessä.)

Esimerkkejä erilaisista divergensseistä:



$\nabla \cdot \vec{F} > 0$ $\nabla \cdot \vec{F} < 0$ $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

***

Esimerkki: Sähköopin mukaan sähkökentän $\vec{E}$ divergenssi jossakin pisteessä on sama kuin varaustiheys ρ tässä pisteessä,

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}.$$

Positiivinen sähkövaraus $(\rho > 0)$ on siis sähkökentän lähde ja negatiivinen sähkövaraus on sähkökentän nielu $(\rho < 0)$.

Sähkökentän kenttäviivat, joiden tangentteja sähkökentät ovat, lähtevät positiivisista sähkövarauksista ja päätyvät negatiivisiin sähkövarauksiin.

***

Kun gradientista ottaa divergenssin, saa

$$\nabla \cdot (\nabla f(x,y,z)) = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f) + \partial_z(\partial_z f)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f.$$

Kahden nablan pistetuloa sanotaan *Laplace-operaattoriksi* ∇^2:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Laplace-operaattorista käytetään joskus myös merkintää Δ.

***

Esimerkki: Staattisessa tapauksessa sähkökenttä saadaan potentiaalista, $\vec{E} = -\nabla V$. Siten $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V$. Alueessa, jossa ei ole sähkövarausta (ks. edellinen esim.), on siten voimassa *Laplacen yhtälö* $\nabla^2 V = 0$.

***

Roottori $\nabla \times \vec{F}$

Toinen yleinen vektoreihin kohdistuva kolmiulotteinen derivointioperointi on roottori, joka määritellään

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

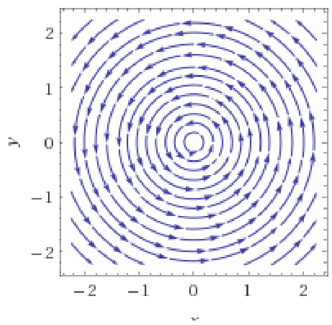
Roottorille käytetään myös merkintää curl,

$$\nabla \times \vec{F} = \operatorname{curl} \vec{F}.$$

Roottori on ”kahden vektorin ristitulona” vektori.

Huomaa, että jos vektori on (x, y)-tasossa eli $\vec{F}(x, y) = F_x(x, y)\hat{i} + F_y(x, y)\hat{j},$ on roottori *z*-akselin suuntainen vektori:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$



Oikean käden säännön mukaisesti roottori $\nabla \times \vec{F}$ osoittaa katsojaa kohti.

Roottori on määritelty vain kolmiulotteisen avaruuden vektoreille (ja kaksiulotteisen avaruuden vektoreille, jolloin tulos on aina kolmannessa ulottuvuudessa), toisin kuin gradientti ja divergenssi, joita voidaan käyttää kaiken dimensioisissa avaruuksissa.

Karkeasti sanottuna roottori $\nabla\times\vec{F}(\vec{r})$ ilmaisee, kuinka voimakkaasti vektorikenttä $\vec{F}(\vec{r})$ on ”kiertynyt” pisteen $\vec{r}$ ympäri. Suomenkielessä roottorista käytetään myös nimitystä *pyörteisyys* ($\nabla\times\vec{F}(\vec{r})$on pyörretiheys). Mitä suurempi roottori on, sitä ”tiukempaa” on pyörteisyys.

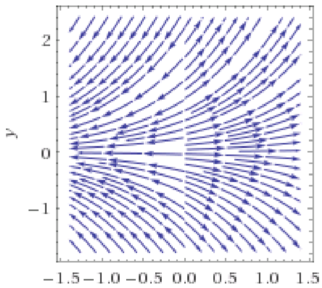
***

Esimerkki: Lasketaan vektorin $\vec{F}(\vec{r}) = x\hat{i} + xy\hat{j}$ roottori:

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [\partial_y 0 - \partial_z(xy)]\hat{i} + [\partial_z x - \partial_x 0]\hat{j} + [\partial_x(xy) - \partial_y x]\hat{k}$$

$$= y\hat{k}.$$



(Sain tämän kuvan kirjoittamalla Wolfram Alphan ruutuun (x,xy).)

Tässä kenttäviivat ovat kiertyneet *z*-akselin ympäri. Ylätasossa ($y > 0$) $\nabla\times\vec{F}$ osoittaa katsojaa päin, alatasossa ($y < 0$) poispäin oikena käden säännön mukaan.

***

Lopuksi vielä joukko nablailutuloksia:

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}),$$
$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}),$$
$$\nabla\times(\vec{F}\times\vec{G})=(\nabla\cdot\vec{G})\vec{F}+(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}-(\nabla\cdot\vec{F})\vec{G}-(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G},$$
$$\nabla\times(\phi\vec{A})=(\nabla\phi)\times\vec{A}+\phi(\nabla\times\vec{A}),$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{\mathrm{F}})=0,\qquad \text{(roottori on lähteetön)}$$
$$\nabla\times(\nabla\phi)=0,\qquad \text{(gradientti on pyörteetön)}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}.$$

***

Esimerkki: Johdetaan malliksi alin kaava. Merkitään
$\partial_x\partial_y\equiv\partial_{xy}$ jne

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\partial_y F_z-\partial_z F_y\right)\hat{i}+\left(\partial_z F_x-\partial_x F_z\right)\hat{j}+\left(\partial_x F_y-\partial_y F_x\right)$$

Tästä edelleen

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ \left(\partial_y F_z-\partial_z F_y\right) & \left(\partial_z F_x-\partial_x F_z\right) & \left(\partial_x F_y-\partial_y F_x\right)\end{vmatrix}$$
$$=\left[\partial_{yx}F_y-\partial_{yy}F_x-\partial_{zz}F_x+\partial_{zx}F_z\right]\hat{i}+\left[\partial_{zy}F_z-\partial_{zz}F_y-\partial_{xx}F_y+\partial_{xy}F_x\right]\hat{j}$$
$$+\left[\partial_{xz}F_x-\partial_{xx}F_z-\partial_{yy}F_z+\partial_{yz}F_y\right]\hat{k}.$$

Lisätään ja vähennetään nyt jokaiseen hakasulkeiseen sieltä ”puuttuva” $\partial_{uu}F_u$-tyyppinen termi, esim. ensimmäiseen $\partial_{xx}F_x$. Silloin miinusmerkkisistä tämän tyyppisistä termeistä saadaan

$$-(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz})(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})=-\nabla^2\vec{F}.$$

Ensimmäiseen hakasulkeiseen jää

$$\left[\partial_{yx}F_y+\partial_{xx}F_x+\partial_{zx}F_z\right]\hat{i}=\partial_x[\partial_yF_y+\partial_xF_x+\partial_zF_z]\hat{i}=\partial_x[\nabla\cdot\vec{F}]\hat{i},$$

jossa on käytetty derivointijärjestyksen vaihdannaisuutta $\partial_x\partial_y=\partial_y\partial_x$ jne. Muista hakasulkeista saadaan vastaavat lausekkeet eli kaikkiaan

$$\partial_x[\nabla\cdot\vec{F}]\hat{i}+\partial_y[\nabla\cdot\vec{F}]\hat{j}+\partial_z[\nabla\cdot\vec{F}]\hat{k}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F}).$$

Ja niin onkin kaava tullut näytetyksi toteen.

***