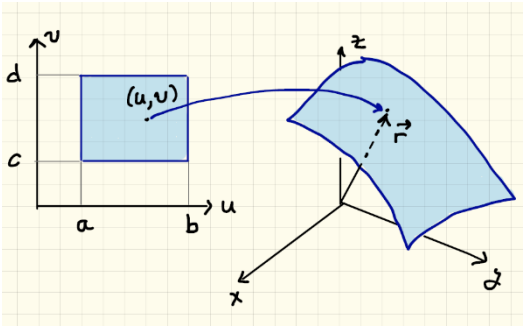
5. Pinnat ja pintaintegraalit

Pintojen parametriesitys. Aikaisemmin käsittelimme käyrän esittämistä parametrimuodossa. Siihen riitti yksi reaalinen parametri (t), joka sai arvoja jollakin reaaliakselin välillä $a \le t \le b$. Pinta on kaksiulotteinen olio, joten sen parametrisointiin tarvitaan kaksi parametria, esim. reaaliluvat u ja v. *Pinnan parametriesitys* on

A 15.5

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k},$$

jossa $a \le u \le b, \quad c \le v \le d$. Pinnan sanotaan olevan sileä, jos sen jokaiseen pisteeseen voidaan määrittää yksikäsitteisesti tangenttitaso. Tässä on asioiden helpottamiseksi otettu parametri-alueeksi uv-tason suorakaide; voisi se olla jokin muukin yhtenäinen suljettu ja rajoitettu uv-tason alue (ympyräkiekko, kolmio jne), jolla on hyvin määritelty pinta-ala.



***

Esimerkki. Pinta, jonka määrää yhtälö $z = f(x,y), \quad (x,y) \in A$, voidaan esittää parametrimuodossa seuraavasti:

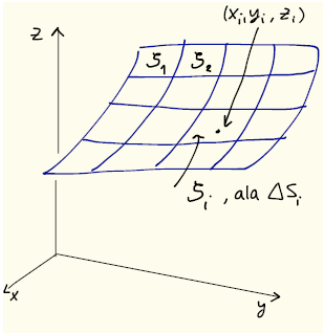
$$\vec{r}(u,v) = u\hat{i} + v\hat{j} + f(u,v)\hat{k},$$

jossa $(u,v) \in A$. Tällaisessa tapauksessa on usein luontevaa samaistaa (u,v)-taso (x,y)-tason kanssa, jolloin tason parametriesitys on

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x,y)\hat{k}, \qquad (x,y) \in A.$$

***

Pintaintegraalit. Olkoon $\mathcal{S}$ äärellinen pinta $\mathbb{R}^3$:ssa ja $f(x,y,z)$ pinnan pisteissä määritelty äärellinen funktio.
Jaetaan pinta osa-alueisiin $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$, joiden pinta-alat ovat ΔS_i. Olkoon (x_i, y_i, z_i) jokin piste alueessa $\mathcal{S}_i$. Muodostetaan summa (Riemannin summa)



Pinta $\mathcal{S}$.

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Jos tällä summalla on yksikäsitteinen raja-arvo, pisteiden (x_i, y_i, z_i) valinnasta riippumatta, kun osa-alueiden $\mathcal{S}_i$ pinta-alojen annetaan lähestyä nollaa (eli tihennetään pinnan jakoa rajattomasti), sanotaan funktion f olevan integroituva pinnalla $\mathcal{S}$. Summan raja-arvon sanotaan olevan *funktion f pintaintegraali pinnan $\mathcal{S}$ yli*. Sitä merkitään näin,

$$\iint_S f(x,y,z)dS.$$

Kun funktio f ja pinta $\mathcal{S}$ on annettu, tehtäväksi jää parametrisoida pinta sopivasti ja suorittaa integraali molempien parametrien suhteen.

Pintaintegraali tasopinnan yli. Aloitetaan yksinkertaisesta 2-ulotteisesta tapauksesta, jossa alue on jokin (x,y)-tason suorakaide (siis tasopinta) $a \le x \le b,\ \mathrm{c} \le y \le d$ eli suorakulmio $[\mathrm{a},\mathrm{b}]\times[\mathrm{c},\mathrm{d}]$. Tällöin

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_a^b dx \left[\int_c^d dy\, f(x,y) \right].$$

Pintaintegraali siis muuttuu kahdeksi peräkkäiseksi yhden muuttuja integroinniksi: ensin $f(x,y)$ integroidaan y:n suhteen, josta tuloksena on jokin x:n funktio, ja tämä integroidaan sitten x:n suhteen.

(Jos pinta $\mathcal{S}$ ei ole suorakaide, voimme ajatella sen jonkin suorakaiteen sisälle ja asettaa funktiolle arvon $f = 0$ $\mathcal{S}$:n ulkopuolelle jäävässä osassa suorakaidetta.)

On monia tapoja kirjoittaa edellä oleva pintaintegraali:

$$\int_a^b dx \left[\int_c^d dy\, f(x,y) \right] = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)$$

$$= \int_a^b \int_c^d dxdy\, f(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dxdy.$$

Tässä on sopimuksena, että integroinnit suoritetaan oikealta vasemmalle eli ensin y ja sitten x ja että integraalimerkit rajoineen kirjoitetaan samaan järjestykseen kuin vastaavat differentiaalit. Joskus on hyödyllistä kirjoittaa integraalimerkkiin muuttuja näkyviin:

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} dxdy\, f(x,y).$$

***

Esimerkki: Olkoon $\mathcal{S}$ suorakulmio $[0,1]\times[0,1]$ ja $f(x,y) = x^2 + y$. Silloin

$$\iint_S dS\, f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + y) = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^1$$

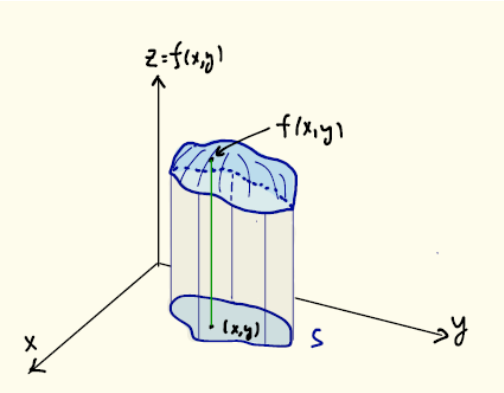
$$= \int_0^1 dx (x^2 + \tfrac{1}{2}) = \left[\tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Esimerkki: Jos integroidaan funktio $f(x,y)=1$ yli tasopinnan $\mathcal{S}$, saadaan tulokseksi pinnan ala:

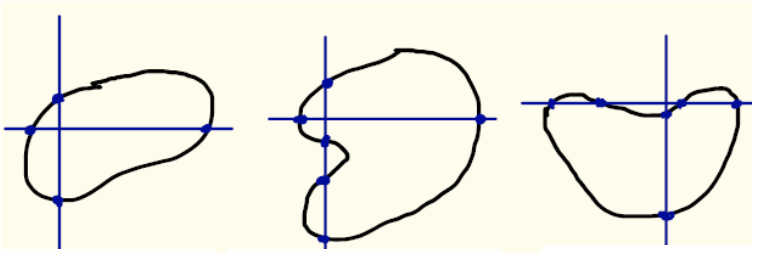
$$\iint_S dxdy \cdot 1 = \iint_S dS = S : \text{n pinta-ala.}$$

***

Integraalilla yli tasopinnan on seuraava geometrinen tulkinta: Jos $f > 0$ pinnalla $\mathcal{S}$, niin pintaintegraali on sen lieriö-kappaleen tilavuus, jonka kantena on pinta $z = f(x,y)$, pohjana taso $z = 0$ ja poikkileikkauksena $\mathcal{S}$.

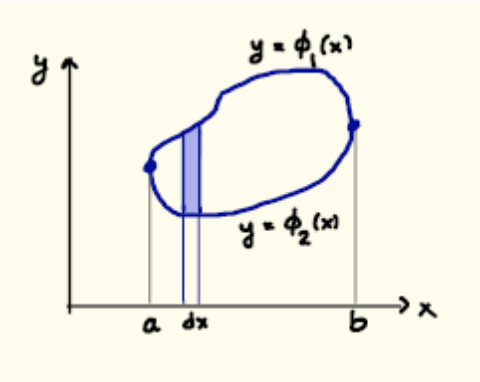


Tason alue on säännöllinen, jos koordinaattiakselien suuntaiset suorat leikkaavat alueen reunaa korkeintaan kahdessa pisteessä.



Säännöllinen alue | *x*-suunnassa säännöllinen alue | *y*-suunnassa säännöllinen alue

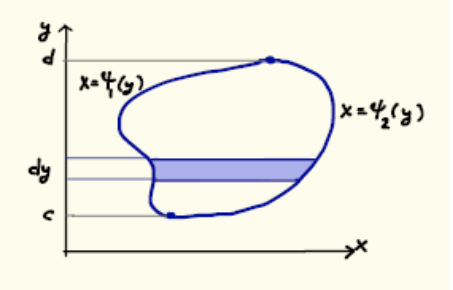
Jos integroimisalue on säännöllinen *y*-suunnassa, voidaan integrointi suorittaa ”viipaleittain” eli ottamalla *x*-



integroinnissa integroimisalkioksi alareunakäyrästä $\phi_1(x)$ yläreunakäyrään $\phi_2(x)$ ulottuvan *dx*-levyisen pinta-alkion (ks. kuva):

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_a^b dx \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\, f(x,y) \right].$$

Jos taas integroimisalue on säännöllinen *x*-suunnassa, voidaan integrointi suorittaa päinvastaisessa järjestyksessä ”viipaleittain” eli ottamalla *x*-integroinnissa integroimisalkioksi alareunakäyrästä $\psi_1(x)$ yläreunakäyrään $\psi_2(x)$ ulottuvan *dy*-levyisen pinta-alkion (ks. kuva):



$$\iint_S f(x,y)dS = \int_c^d dy \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dx\, f(x,y) \right].$$

***

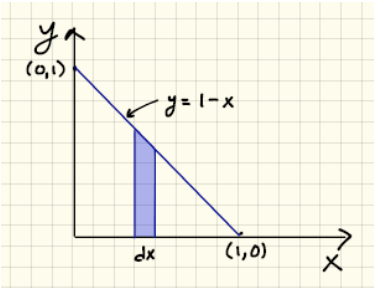
Esimerkki: Lasketaan funktion $f(x,y) = y$ pintaintegraali yli alueen, jota rajoittavat *x*- ja *y*-akselit ja suora $x + y = 1$. Alue on säännöllinen molemmissa suunnissa, joten lasketaan se harjoituksen vuoksi molemmin suuntaisin viipalein.

Ensin *y*-suuntaisesti viipaloiden. Kutakin *x* kohti *y* integroidaan alakäyrältä $y = \phi_1(x) = 0$ yläkäyrälle $y = \phi_2(x) = 1 - x$. Saadaan

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} dy\, y \right] =$$

$$\int_0^1 dx \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} = \int_0^1 dx\, \tfrac{1}{2}(1-x)^2$$

$$= \left[-\tfrac{1}{6}(1-x)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

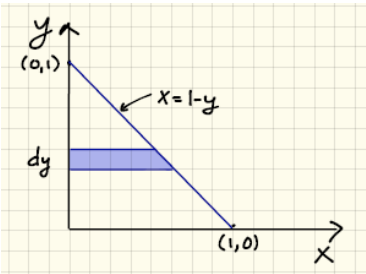


Kun viipaloidaan x-suuntaisesti, saadaan vastaavasti

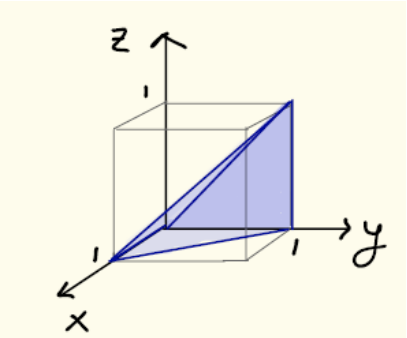
$$\iint_S f(x,y)dS = \int_0^1 dy \left[\int_0^{1-y} dx\, y \right] =$$

$$\int_0^1 dy\, y \left[x \right]_0^{1-y} = \int_0^1 dy\, y(1-y)$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$



Kuvassa on esitetty kappale, jonka integroimisalue ja funktio f virittävät. Se täyttää yhden kuudesosan yksikkökuutiosta, kuten laskemastamme sen tilavuudesta voi päätellä.



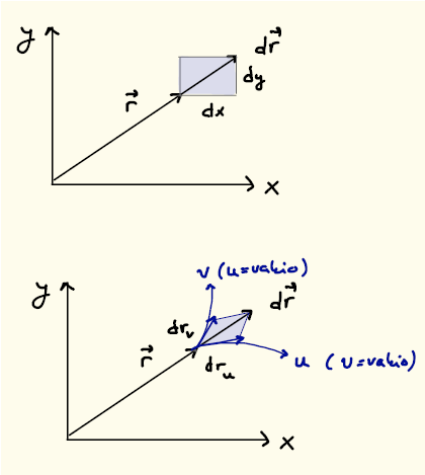
Muuttujien vaihto pintaintegraalissa. Yllä käsittelimme tilanteita, joissa integroitava funktio ja pinta, jonka yli integroidaan, olivat esitetty karteesisten koordinaattien avulla. Usein kannattaa kuitenkin käyttää niiden sijasta toisia muuttujia integroinnin helpottamiseksi.

Oletetaan nyt, että käytetään uusia muuttujia u ja v, joiden avulla lausuttuna karteesisilla koordinaateilla on lausekkeet

$$x = x(u,v) = g(u,v), \quad y = y(u,v) = h(u,v).$$

Alkuperäinen xy-avaruuden integroimisalue $\mathcal{S}$ korvautuu uv-avaruuden alueella $\mathcal{T}$. Kun integraalia laskee uusien muuttujien avulla, tulee huomata, että pinta-alkion koko muuttuu eli että yleensä $dS \neq dT$ eli $dxdy \neq dudv$. Tämä tulee ottaa huomioon Riemannin summassa ja sitä myöten pintaintegraalissa. Selvitetään seuraavaksi tuo muutos.

Infinitesimaalinen pinta-alkio $dxdy$ on paikkavektorin $\vec{r}$ muutoksen $d\vec{r}$ ”virittämän” suunnikkaan ala. Tämä pinta-ala on sama kuin uusien koordinaattikäyrien suuntaan otettujen $d\vec{r}$:n komponenttien $d\vec{r}_u$ ja $d\vec{r}_v$ xy-tasoon virittämän alueen pinta-ala $\left|d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v\right|$. Nyt on



$$d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du = \frac{\partial}{\partial u}(x\hat{i} + y\hat{j})du = \frac{\partial}{\partial u}\left(g(u,v)\hat{i} + h(u,v)\hat{j}\right)du$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial h}{\partial u}\hat{j}\right)du,$$

$$d\vec{r}_v = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial h}{\partial v}\hat{j}\right)dv,$$

joten

$$dS = \left| d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v \right| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_u g & \partial_u h & 0 \\ \partial_v g & \partial_v h & 0 \end{vmatrix} \right\| dudv$$

$$= \left\| \begin{matrix} \partial_u g & \partial_u h \\ \partial_v g & \partial_v h \end{matrix} \right\| dudv.$$

Itseisarvomerkkien sisällä olevaa determinanttia kutsutaan *Jacobin determinantiksi*, ja sille on käytössä monia merkintöjä:

$$\begin{vmatrix} \partial_u g & \partial_u h \\ \partial_v g & \partial_v h \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv J(u,v).$$

Pinta-alkio $dS = dxdy$ voidaan siis kirjoittaa uusissa muuttujissa näin:

$$dS = dxdy = \left| J(u,v) \right| dudv = \left| J(u,v) \right| dT.$$

Pintaintegraalille pätee siis

$$\iint_S dxdy\, f(x,y) = \iint_T dudv\, \left| J(u,v) \right| \tilde{f}(u,v),$$

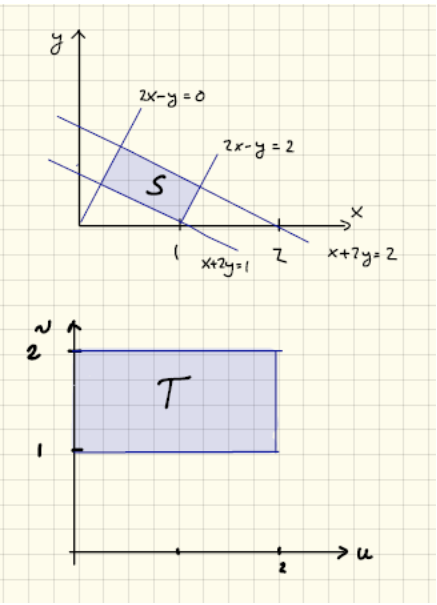
missä $\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

***

Esimerkki: Lasketaan pintaintegraali

$$I = \iint_S dxdy \underbrace{\frac{x}{x+2y}}_{=f(x,y)},$$

jossa S on suorien



$$2x - y = 0, 2x - y = 2,$$
$$x + 2y = 1, x + 2y = 2$$

rajoittama suunnikas. Suunnikas on ikävässä asennossa integrointia ajatellen, joten muuttujien vaihto on paikallaan. Ilmeinen valinta uusiksi muuttujiksi on

$$u = 2x - y, \quad v = x + 2y,$$

josta ratkaistuina

$$x = \tfrac{1}{5}(2u + v), \quad y = \tfrac{1}{5}(-u + 2v).$$

Jacobin determinantti on silloin

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Integraali voidaan nyt suorittaa:

$$I = \iint_S dudv \underbrace{\frac{1}{5}}_{=|J|} \cdot \underbrace{\frac{(2u+v)/5}{v}}_{=\tilde{f}(u,v)} = \frac{1}{25}\iint_T dudv\left(1 + \frac{2u}{v}\right)$$

$$= \frac{1}{25}\int_{u=0}^{1} du \int_{v=1}^{2} dv\left(1 + \frac{2u}{v}\right) = \frac{1}{25}\int_{u=0}^{1} du\left[v + 2u\log|v|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{25}\left[u + u^2\log 2\right]_0^2 = \frac{2 + 4\log 2}{25}.$$

***